

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

1.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL.

TOME HUITIÈME. — ANNÉE 1892.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées;

Par M. Émile PICARD.

On sait que, dans ses belles et profondes recherches sur les fonctions de plusieurs variables (*Monatsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin,* 1869 et 1878), M. Kronecker s'est occupé de la recherche du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées contenues dans un domaine Δ. Désignons ces n équations par

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

M. Kronecker a trouvé une intégrale multiple d'ordre $(n-1)$,

étendue à la *surface* du domaine, dont la signification est extrêmement remarquable. Cette intégrale représente l'excès du nombre des racines, contenues dans le domaine, pour lesquelles le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est positif, sur le nombre des racines pour lesquelles ce déterminant est négatif.

Le problème de la recherche du nombre *exact* des racines ne semble donc pas résolu par la formule de M. Kronecker (¹). Je me propose de montrer qu'en s'appuyant sur le résultat de l'illustre géomètre, on peut arriver à représenter par une intégrale multiple d'ordre n le nombre cherché des racines; c'est l'objet des pages qu'on va lire. Après avoir rappelé rapidement la formule de M. Kronecker, j'expose le principe général de la méthode que j'applique particulièrement, en développant les calculs, au cas de deux équations.

1. La formule de M. Kronecker se déduit immédiatement d'une propriété élémentaire des fonctions V, continues dans un certain do-

---

(¹) A la suite des deux Notes que j'ai publiées sur cette question (*Comptes rendus*, 7 septembre et 16 novembre 1891), M. Kronecker m'a fait l'honneur de m'écrire une lettre où il me représente qu'on trouve dans son Mémoire de 1878 la solution de la question. Je ne puis partager l'opinion de l'illustre auteur; il me semble que, dans ce problème, on doit chercher à exprimer le nombre des racines par une formule dont l'application ne nécessite aucune discussion spéciale relative au système particulier des équations $f = 0$ et que les intégrales à effectuer doivent dépendre uniquement, au point de vue des limites, du domaine Δ : c'est ce qui n'a pas lieu dans l'analyse de M. Kronecker, qui partage le domaine Δ en plusieurs autres dépendant des équations particulières que l'on a à étudier. (*Voir* sur ce point une Communication de M. Kronecker, *Comptes rendus*, 28 décembre 1891, et les remarques que j'ai faites à ce sujet.)

maine et satisfaisant à l'équation de Laplace; nous la présenterons de la manière suivante, en prenant d'abord le cas de trois variables. Si la fonction $V(X, Y, Z)$ est uniforme et continue dans un espace limité par une surface S et satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0,$$

on a

$$(1) \qquad \iint \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

l'intégrale étant étendue à la surface S.

Appliquons cette formule à la fonction

$$V = \frac{1}{r} \qquad (r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}),$$

et transformons-la en faisant le changement de variables

$$\begin{aligned} X &= f(x, y, z), \\ Y &= \varphi(x, y, z), \\ Z &= \psi(x, y, z). \end{aligned}$$

L'intégrale (1) peut s'écrire

$$\iint \frac{X\, dY\, dZ + Y\, dZ\, dX + Z\, dX\, dY}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour trouver l'élément de l'intégrale transformée, concevons que x, y, z aient été exprimés en fonction de deux paramètres u et v. L'élément $dY\, dZ$ devra être remplacé par

$$\left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, z)} \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(z, x)} \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right] du\, dv,$$

et on a des expressions analogues pour $dZ\, dX$ et $dX\, dY$. En substi-

tuant dans l'intégrale, on trouve alors de suite la nouvelle intégrale

$$\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy, \tag{2}$$

où

$$A = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \psi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad C = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'après l'égalité (1), l'intégrale (2), étendue à une surface fermée S, sera nulle si, à l'intérieur de S, il n'y a pas de points (x, y, z) pour lesquels f, φ et ψ s'annulent à la fois.

Si, au contraire, les fonctions f, φ, ψ s'annulent à l'intérieur de S, l'intégrale (2) ne sera pas nulle en général. En supposant que les racines du système d'équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$

soient simples, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul pour les racines considérées, on établit [1] que l'intégrale (2) est égale à

$$4\pi m,$$

[1] On en trouvera la démonstration dans les Mémoires de M. Kronecker; j'en ai donné une démonstration toute différente dans le Tome I de mon *Traité d'Analyse*, p. 123.

m désignant la différence entre le nombre des racines contenues dans S, pour lesquelles le déterminant fonctionnel D est positif et celles pour lesquelles il est négatif.

2. Le résultat précédent se généralise facilement et l'on peut donner la forme suivante au théorème de M. Kronecker pour le cas de n équations. Soient les n équations

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Formons l'intégrale multiple d'ordre $n-1$,

$$\mathrm{I} = \int\int\cdots\int \frac{\Sigma \mathrm{A}_i\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n}{(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2)^{\frac{n}{2}}},$$

étendue à l'extérieur de la *surface* limitant un certain domaine Δ, de l'espace à n dimensions, en posant

$$\mathrm{A}_i = \begin{vmatrix} f_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

si n est pair, tandis que A_i est égal au déterminant précédent multiplié par $(-1)^{i-1}$ si n est impair.

Si l'on désigne par S la surface de l'hypersphère de rayon *un* dans l'espace à n dimensions, on aura

$$\mathrm{I} = \mathrm{S}.m,$$

m représentant la différence entre le nombre des racines du sys-

tème (3) contenues dans Δ, pour lesquelles le déterminant fonctionnel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est positif et celles pour lesquelles il est négatif.

La valeur de S est donnée par la formule

$$S = 2\pi . 2 \cdot \frac{1}{2} \pi . 2 \frac{2}{3} \cdot \frac{1.3}{2.4} \pi . 2 \frac{2.4}{3.5} \cdots$$

En particulier, pour $n = 4$, on aura

$$S = 2\pi^2.$$

3. Tel est le résultat fondamental dû à M. Kronecker. Comme je l'ai dit plus haut, il ne permet pas de trouver le nombre exact des racines du système (3), contenues dans le domaine Δ, puisque le nombre m représente seulement une différence. C'est cette lacune que je me propose de combler, en montrant qu'*on peut représenter par une intégrale définie convenable le nombre exact des racines.*

Considérons, à cet effet, le système des $n+1$ équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ \cdots\cdots, \\ f_n = 0, \\ zD = 0, \end{array} \right.$$

aux $n+1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, en représentant toujours par D le déterminant fonctionnel écrit plus haut.

J'envisage dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ l'ensemble des valeurs de ces variables correspondant à des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contenus dans Δ et à des valeurs de z comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ (ε désignant une constante positive arbitraire). Cet en-

semble définit un domaine Δ', et le nombre des racines du système (4) correspondant à des points de ce domaine sera précisément le nombre des racines du système (3) contenues dans Δ (nous supposons que toutes les racines considérées sont simples, c'est-à-dire que D ne s'annule pas pour ces racines). Or le déterminant fonctionnel des $n+1$ fonctions formant les premiers membres des équations (4) se réduit à la quantité essentiellement positive

$$D^2.$$

La difficulté relative au signe du déterminant fonctionnel a donc disparu, et l'on pourra, par suite, *représenter par une intégrale multiple d'ordre n le nombre des racines communes aux équations* (3) *contenues dans* Δ.

4. Le principe de la solution étant ainsi indiqué, appliquons-le d'abord au cas d'une seule équation

$$f(x)=0,$$

dont on veut avoir le nombre des racines comprises entre a et b.

Nous formons les deux équations

$$f(x)=0,$$
$$yf'(x)=0,$$

et nous avons à chercher le nombre des racines, communes à ces deux équations, contenues dans le rectangle formé par les droites

$$x=a, \qquad x=b, \qquad y=+\varepsilon, \qquad y=-\varepsilon.$$

Or le nombre des racines communes aux deux équations

$$f(x,y)=0, \qquad \varphi(x,y)=0,$$

contenues dans un contour C, est représenté par l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f\,d\varphi-\varphi\,df}{f^2+\varphi^2},$$

prise positivement le long du contour, quand on est assuré que le déterminant fonctionnel ne change pas de signe. Appliquons ici cette formule, on aura de suite, en intégrant le long du rectangle, pour le nombre n des racines

$$n = -\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{f^2+\varepsilon^2 f'^2}\,dx + \frac{1}{\pi}\,\text{arc tang}\,\frac{\varepsilon f'(b)}{f(b)} - \frac{1}{\pi}\,\text{arc tang}\,\frac{\varepsilon f'(a)}{f(a)},$$

les *arc tang* étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

L'intégrale qui figure dans le second membre pourrait être calculée; du moins, on a de suite l'intégrale indéfinie qui est

$$\text{arc tang}\left[\frac{\varepsilon f'(x)}{f(x)}\right]$$

et alors on voit bien, *a priori*, que le second membre représente le nombre des racines. Il faut donc garder l'intégrale, telle qu'elle est écrite, et cette formule ne pourrait être intéressante qu'au point de vue pratique : elle permet, en calculant par approximation le second membre, d'avoir la valeur exacte de n.

5. Prenons maintenant le cas de deux équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0;$$

nous aurons à considérer le système des trois équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

Nous allons chercher le nombre des racines de ce système, comprises dans le volume limité par le cylindre ayant pour section droite la courbe C et les deux plans

$$z = -\varepsilon, \qquad z = +\varepsilon.$$

Calculons d'abord la partie de l'intégrale relative à la surface latérale du cylindre. En prenant les notations du n° **1**, elle se réduira à l'intégrale

$$\int\int A\,dy\,dz + B\,dz\,dx.$$

D'une manière générale, on a

$$dy\,dz = d\sigma\cos\alpha, \qquad dz\,dx = d\sigma\cos\beta,$$

$d\sigma$ désignant l'élément positif de la surface, α et β les angles que fait avec les axes la normale extérieure à la surface. Ici nous pouvons prendre pour α et β les angles que fait la normale extérieure à la courbe C avec les axes Ox et Oy et

$$d\sigma = ds.dz,$$

ds étant l'élément d'arc de C, et dz étant positif. Nous aurons donc, pour l'intégrale précédente,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int (A\cos\alpha + B\cos\beta)\,ds\,dz;$$

mais, sur la courbe C,

$$dx = -\,ds\cos\beta,$$
$$dy = +\,ds\cos\alpha.$$

Nous pouvons, par suite, écrire l'intégrale sous la forme

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int (A\,dy - B\,dx)\,dz;$$

or on a

$$A = \frac{\left(f\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)D}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left(D = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$
$$B = -\frac{\left(f\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)D,}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Il en résulte que, dans l'évaluation du nombre des racines, la portion de l'intégrale double provenant de la surface latérale du cylindre se réduit à l'intégrale curviligne, prise positivement le long du contour C

$$(\alpha) \qquad \int P\,dx + Q\,dy,$$

où

$$P = \frac{1}{4\pi}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{D\,dz}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Q = \frac{1}{4\pi}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{D\,dz}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale qui figure dans P et Q peut s'obtenir immédiatement; on trouve ainsi

$$P = \frac{1}{2\pi}\,\frac{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}}{f^2+\varphi^2}\,\frac{D\varepsilon}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Q = \frac{1}{2\pi}\,\frac{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f^2+\varphi^2}\,\frac{D\varepsilon}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Passons à la portion de l'intégrale relative aux deux premiers plans de base du cylindre. Ils donneront l'intégrale double étendue à l'aire limitée par le contour C

$$(\beta) \qquad \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\int\frac{R\,dx\,dy}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en écrivant

$$R = \begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ D & \dfrac{\partial D}{\partial x} & \dfrac{\partial D}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

La somme des intégrales (α) *et* (β) *donne le nombre cherché des*

racines communes aux deux équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$

contenues dans le contour C.

On voit que le champ d'intégration dans ces deux intégrales ne dépend que du contour C.

6. Le résultat précédent dépend en apparence du nombre ε. Les deux cas limites $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \infty$ appellent nécessairement l'attention.

Faisons tendre d'abord ε vers zéro, l'intégrale (α) tendra vers zéro. Quant à l'intégrale (β), elle se présente sous une forme indéterminée qui rappelle entièrement ce que nous avons trouvé pour le cas d'une seule équation (n° 4); nous pouvons dire que le nombre cherché est la limite de l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\varepsilon R\,dx\,dy}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quand ε tend vers zéro. Il est clair que pour $\varepsilon = 0$ tous les éléments de l'intégrale sont nuls, sauf celui qui correspond à une racine commune aux deux équations $f = 0$, $\varphi = 0$, et c'est de là que provient la forme indéterminée. Nous chercherons tout à l'heure comment on pourrait calculer cette limite pour quelques contours particuliers et en supposant que f et φ soient des polynômes.

Faisons maintenant augmenter indéfiniment ε dans les intégrales (α) et (β). On voit immédiatement que la première tend vers

$$\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{D}{|D|}\,\frac{f\,d\varphi-\varphi\,df}{f^2+\varphi^2}.$$

$|D|$ désignant la valeur absolue de D.

Cette intégrale est à rapprocher de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{f\,d\varphi-d\varphi f}{f^2+\varphi^2},$$

faisant connaître la différence entre le nombre des racines contenues

dans C, pour lesquelles le déterminant fonctionnel D est positif, et celles pour lesquelles il est négatif. Les éléments de ces deux intégrales ne peuvent que différer par le signe sur certaines parties du contour.

Quant à l'intégrale (β), elle se réduit, en posant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, à

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\eta R\,dx\,dy}{[D^2+\eta(f^2+\varphi^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

dont on doit chercher la limite pour $\eta = 0$. Il y aura ici, pour $\eta = 0$, une suite d'éléments indéterminés correspondant aux valeurs de x et y, pour lesquelles

$$D = 0.$$

Si D ne s'annule pas à l'intérieur de C, cette limite est nulle et l'on n'a qu'à prendre l'intégrale curviligne, ce qui est d'accord avec le résultat dont nous avons fait usage au n° **4**.

7. Appliquons les considérations précédentes au cas où le contour considéré se réduit à un carré dont les côtés peuvent être supposés parallèles aux axes et où les deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont des polynômes. On peut, dans ce cas, écrire les deux équations simultanées

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0$$

sous la forme

$$f(x) = 0,$$
$$y - F(x) = 0,$$

$f(x)$ et $F(x)$ représentant deux polynômes, puisqu'on suppose qu'il n'y a que des racines simples. Le polynôme $f(x)$ n'aura aussi que des racines simples.

Il s'agit de trouver le nombre des racines (x, y) communes à ces deux équations, pour lesquelles

$$a < x < b,$$
$$c < y < d.$$

On suppose qu'aucune des racines des deux équations ne se trouve sur une des droites limites.

Le déterminant fonctionnel D se réduit ici à $f'(x)$, et l'on a

$$R = f'^2 - ff''.$$

Nous devons donc considérer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\varepsilon(f'^2 - ff'')\,dx\,dy}{[(y-F)^2 + f^2 + \varepsilon^2 f'^2]^{\frac{3}{2}}},$$

étendue à l'aire du rectangle, et faire tendre ε vers zéro.

En effectuant l'intégration par rapport à y, cette intégrale devient

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_a^b \frac{\varepsilon(d-F)(f'^2 - ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)[(d-F)^2 + f^2 + \varepsilon^2 f'^2]^{\frac{1}{2}}} - \int_a^b \frac{\varepsilon(c-F)(f'^2 - ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)[(c-F)^2 + f^2 + \varepsilon^2 f'^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Quand ε tend vers zéro, les seuls éléments de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\varepsilon(d-F)(f'^2 - ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)[(d-F)^2 + f^2 + \varepsilon^2 f'^2]^{\frac{1}{2}}}$$

ne tendant pas vers zéro sont ceux qui correspondent aux valeurs de x racines de $f(x)$. Au lieu de l'intégrale précédente, nous pouvons donc nous borner à la suivante $\left(\text{en développant } \frac{1}{\sqrt{(d-F)^2 + f^2 + \varepsilon^2 f'^2}} \text{ par la formule de Taylor}\right)$,

$$\int_a^b \frac{d-F}{|d-F|}\,\frac{\varepsilon(f'^2 - ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)},$$

ce qui nous conduit, pour $\varepsilon = 0$, à

$$-\pi \mathrm{I}_a^b \frac{(d-F)f'}{f},$$

I_a^b désignant l'indice entre a et b, au sens de Cauchy [1], de la fonction

[1] L'indice $\mathrm{I}_a^b F(x)$ d'une fonction rationnelle $F(x)$ est l'excès du nombre de fois que $F(x)$ passe de $+\infty$ à $-\infty$ sur le nombre de fois qu'elle passe de $-\infty$ $+\infty$, quand x varie d'une manière continue de a à b. On sait que Cauchy a donné un procédé régulier de calcul pour trouver ce nombre, procédé basé sur une série d'opérations analogues à celles du théorème de Sturm.

rationnelle $\frac{(d-F)f'}{f}$; et l'on aura, par conséquent, pour le nombre des racines,

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_a^b \frac{(c-F)f'}{f} - \mathrm{I}_a^b \frac{(d-F)f'}{f}\right],$$

Ce résultat est facile à vérifier directement. Quand x, en croissant, passe par une racine de $f(x)$, le quotient

$$\frac{(c-F)f'}{f}$$

passe de $+\infty$ à $-\infty$ si $c-F$ est négatif, c'est-à-dire si le point (x, y) est au-dessus de la droite $y=c$. De même, ce quotient passera de $-\infty$ à $+\infty$ si le point correspondant (x, y) est au-dessous de la droite $y=c$. En désignant donc par n et n' le nombre des racines de nos deux équations (comprises entre les droites $x=a$, $x=b$), situées respectivement au-dessus et au-dessous de la droite $y=c$, on a

$$\mathrm{I}_a^b \frac{(c-F)f'}{f} = n - n';$$

en remplaçant c par d et désignant par N et N' les nombres correspondants, on a

$$\mathrm{I}_a^b \frac{(d-F)f'}{f} = \mathrm{N} - \mathrm{N}'.$$

Or, si nous désignons par ν le nombre des racines comprises dans le rectangle, on a

$$n = \nu + \mathrm{N},$$

$$\mathrm{N}' = \nu + n';$$

donc

$$n - n' - (\mathrm{N} - \mathrm{N}') = 2\nu.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_a^b \frac{(c-F)f'}{f} - \mathrm{I}_a^b \frac{(d-F)f'}{f}\right] = \nu;$$

c'est le résultat que nous voulions vérifier (1).

---

(1) Le cas du rectangle avait été déjà traité, sous une tout autre forme, par M. Hermite dans une Communication faite à l'Académie [*Remarques sur le théorème de* M. *Sturm* (*Comptes rendus*, t. XXXVI, p. 294)].

8. D'une manière plus générale on peut indiquer une marche régulière de calcul pour trouver la limite de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\varepsilon(f'^2-ff'')\,dx\,dy}{[(y-F)^2+f^2+\varepsilon^2 f'^2]^{\frac{3}{2}}},$$

quand le contour est formé de segments de courbes unicursales. Cette intégrale double est, en effet, égale à l'intégrale curviligne

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{\varepsilon(f'^2-ff'')(y-F)\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)[(y-F)^2+f^2+\varepsilon^2 f'^2]^{\frac{1}{2}}},$$

prise dans le sens positif le long du contour C.

Partageons cette intégrale en différentes parties correspondant aux différents segments de courbes unicursales qui, par hypothèse, forment le contour C. Soit l'un d'eux correspondant aux valeurs t_0 et t_1 du paramètre t dont sont fonctions rationnelles x et y. La valeur correspondante de l'intégrale sera, pour $\varepsilon = 0$, en raisonnant comme au numéro précédent,

$$\frac{1}{2}\,\Big|_{t_0}^{t_1}\frac{(y-F)f'}{f}.$$

Le quotient $\frac{(y-F)f'}{f}$ sera une fonction rationnelle de t, et l'on n'aura qu'à en prendre l'indice de t_0 à t_1. En additionnant tous les résultats ainsi obtenus, on aura le nombre cherché.

9. Passons maintenant au cas de trois équations. Quand on a les quatre équations

$$f(x, y, z, t) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, t) = 0,$$
$$\chi(x, y, z, t) = 0$$

et que le déterminant fonctionnel relatif à ces quatre fonctions ne change pas de signe à l'intérieur du domaine, le nombre des racines

est donné par l'intégrale

$$u = \frac{1}{2\pi^2}\int\int\int \frac{A\,dy\,dz\,dt + B\,dz\,dt\,dx + C\,dt\,dx\,dy + D\,dx\,dy\,dz}{(f^2+\varphi^2+\psi^2+\chi^2)^2},$$

où

$$A = \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \chi & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} & \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{vmatrix},$$

B, C, D s'en déduisant par une permutation circulaire de x, y, z, t.

Ceci posé, nous avons ici les quatre équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0,$$
$$tD = 0.$$
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Nous pourrions donner, comme pour le cas de deux variables, la formule générale avec le nombre arbitraire ε; mais, les formules étant un peu longues à écrire, bornons-nous au terme qui ne tendra pas vers zéro avec ε. Ce sera

$$\frac{1}{\pi^2}\int\int\int \frac{\varepsilon R\,dx\,dy\,dz}{(f^2+\varphi^2+\psi^2+\varepsilon^2 D^2)^2},$$

en posant

$$R = \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ D & \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y} & \frac{\partial D}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Développons les calculs dans le cas où le volume se réduira à un parallélépipède parallèle aux axes, c'est-à-dire où le domaine Δ est défini par les inégalités

$$a < x < b,$$
$$a' < y < b',$$
$$a'' < z < b''$$

et en supposant que f, φ, ψ se réduisent à des polynômes.

On admet qu'aucune des racines des trois équations ne se trouve sur un des plans limites.

On peut mettre les trois équations sous la forme

$$f(x) = 0,$$
$$y - \mathrm{F}(x) = 0,$$
$$z - \Phi(x) = 0,$$

f, F et Φ désignant des polynômes en x.

On a

$$\mathrm{D} = f', \qquad \mathrm{R} = ff'' - f'^2.$$

Il faut donc calculer l'intégrale triple

$$\frac{1}{\pi^2}\int_a^b\int_{a'}^{b'}\int_{a''}^{b''}\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)\,dx\,dy\,dz}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2+(z-\Phi)^2]}.$$

En intégrant d'abord par rapport à z et laissant de côté $\frac{1}{\pi^2}$, on a

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2]}\\ &\quad\times\left\{\frac{b''-\Phi}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2+(b''-\Phi)^2]}-\frac{a''-\Phi}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2+(a''-\Phi)^2]}\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned}&+\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2]^{\frac{3}{2}}}\\ &\times\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{b''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2}}-\operatorname{arc\,tang}\frac{a''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2}}\right].\end{aligned}\right.$$

Il faut effectuer l'intégration par rapport à y; on a alors deux types différents d'intégrales.

Prenant dans la ligne (γ) l'expression

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)(b''-\Phi)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2][f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2+(b''-\Phi)^2]},$$

nous aurons, en la décomposant, deux termes. Le seul qui soit à discuter, quand on fera $\varepsilon=0$, est le terme

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(b''-\Phi)[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2]}$$

qui, intégré entre a' et b', par rapport à y, donne

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(b''-\Phi)(f^2+\varepsilon^2 f'^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\text{arc tang}\,\frac{b'-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}}-\text{arc tang}\,\frac{a'-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}}\right].$$

Nous avons maintenant à intégrer cette expression par rapport à x, en nous bornant, d'ailleurs, à des petits intervalles autour de chaque racine de $f(x)=0$ (on remarquera que, d'après l'hypothèse faite, $b''-\Phi$ n'est pas nul pour ces racines); pour tout autre intervalle l'intégrale est évidemment nulle quand on fait $\varepsilon=0$.

Or l'élément précédent peut s'écrire

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}}\,A(x),$$

A étant une fonction de x qui reste finie pour $x=\alpha$ [α étant une racine de $f(x)$], et pour $\varepsilon=0$. Écrivons l'intégrale à effectuer sous la forme

$$\int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta}\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{f^2+\varepsilon^2 f'^2}\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}\,A\,dx;$$

le premier facteur est

$$\frac{d}{dx}\left(\text{arc tang}\,\frac{\varepsilon f'}{f}\right),$$

et il est négatif de $\alpha-\eta$ à $\alpha+\eta$; on peut donc écrire, en appliquant

le théorème de la moyenne, l'intégrale sous la forme

$$\sqrt{f^2(\xi)+\varepsilon^2 f'^2(\xi)}\,A(\xi)\int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} d\left(\text{arc tang}\,\frac{\varepsilon f'}{f}\right),$$

ξ étant compris entre $\alpha-\eta$ et $\alpha+\eta$, c'est-à-dire

$$\sqrt{f^2(\xi)+\varepsilon^2 f'^2(\xi)}\,A(\xi)\left[-\pi+\text{arc tang}\,\frac{\varepsilon f'(\alpha+\eta)}{f(\alpha+\eta)}-\text{arc tang}\,\frac{\varepsilon f'(\alpha-\eta)}{f(\alpha-\eta)}\right];$$

par suite, pour $\varepsilon=0$, l'intégrale sera très petite, et, comme on peut prendre η aussi petit qu'on veut, la limite de l'intégrale correspondant à la ligne γ sera nulle.

Nous n'avons donc qu'à considérer la seconde ligne; prenons le terme

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2]^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc tang}\,\frac{b''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2}}.$$

Il faut d'abord effectuer l'intégration, par rapport à y, entre a' et b'. En intégrant par parties, on aura comme premier terme

$$(5)\quad \frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(f^2+\varepsilon^2 f'^2)}\left[\frac{y-F}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2]^{\frac{1}{2}}}\,\text{arc tang}\,\frac{b''-\Phi}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2]^{\frac{1}{2}}}\right]_{a'}^{b'},$$

et le second terme sera, en se bornant à écrire les termes qui ne se réduiront pas à zéro à la limite,

$$(6)\quad \frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(f^2+\varepsilon^2 f'^2)}\,\frac{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}{b''-\Phi}\left[\text{arc tang}\,\frac{y-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}\right]_{a'}^{b'},$$

Nous devons maintenant faire la somme des expressions (5) et (6), intégrer par rapport à x entre a et b, et chercher la limite pour $\varepsilon=0$.

Les termes correspondants à $y=b'$ donneront

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(f^2+\varepsilon^2 f'^2)}\left[\frac{b'-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b'-F)^2}}\,\text{arc tang}\,\frac{b''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b'-F)^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}{b''-\Phi}\,\text{arc tang}\,\frac{b'-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}\right].$$

Or, pour $\varepsilon = 0$ et une valeur de x annulant $f(x)$, la quantité entre crochets est égale à $+\frac{\pi}{2}$ si le produit

$$(b' - F)(b'' - \Phi)$$

est positif pour cette valeur de x, et à $-\frac{\pi}{2}$ si ce produit est négatif. On en conclut de suite que l'expression précédente, intégrée entre a et b, donnera pour $\varepsilon = 0$,

$$\frac{\pi^2}{2}\int_a^b \frac{(b' - F)(b'' - \Phi)\, f'}{f},$$

et le terme correspondant dans l'intégrale qui donne le nombre cherché des racines sera, par suite,

$$\frac{1}{2}\int_a^b \frac{(b' - F)(b'' - F)\, f'}{f}.$$

On aura des expressions analogues provenant des autres termes de l'intégrale, et, par conséquent, nous pouvons ici, comme dans le cas de deux variables, trouver le nombre des racines en effectuant simplement des recherches d'indices.

Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff;

PAR M. H. POINCARÉ.

L'étude des travaux si intéressants que M. Sylvester a récemment consacrés à la théorie des nombres premiers (*The Messenger of Mathematics,* New Series, n° 241, May 1891) m'a déterminé à entreprendre une généralisation des théorèmes de M. Tchebicheff (voir *Journal de Liouville,* 1re série, t. XVII) et à essayer de les étendre aux nombres premiers complexes. Les résultats auxquels je suis parvenu n'ont pas, comme d'ailleurs on devait s'y attendre, le caractère de précision qui distinguent ceux de l'éminent géomètre russe.

Les inégalités de M. Tchebicheff ne se prêtent pas toutes également bien à la généralisation que j'avais en vue. J'ai donc cherché à en trouver d'autres qui la rendissent plus facile. Celles que j'ai obtenues ainsi n'ajoutent que bien peu de chose à ce que le savant russe nous avait appris et sont souvent même contenues dans les siennes. Elles n'offrent donc d'autre intérêt que celui qui peut résulter de la méthode employée pour y parvenir; j'ai cru néanmoins devoir publier ici les propositions auxquelles j'ai été conduit de la sorte. Le n° **I** se rattache mal à mon sujet et ne m'a mené à aucun résultat important. Je le conserve néanmoins dans l'espoir que de plus habiles que moi en pourront tirer parti.

1. Rappelons d'abord les notations de M. Tchebicheff et les équations fondamentales.

Nous désignerons par $\theta(x)$ la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne surpassent pas x et par $T(x)$ la somme des logarithmes de tous les nombres entiers qui ne surpassent pas x. On a alors

$$T(x) = \sum \theta \sqrt[m]{\frac{x}{n}}.$$

La sommation est étendue à tous les nombres entiers positifs m et à tous les nombres entiers positifs n. Il est à remarquer que la somme du second membre est limitée, car $\theta(x)$ est nul si

$$x < 2.$$

On peut écrire également

$$(1) \qquad T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots + \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots,$$

$$(2) \qquad \psi(x) = \theta(x) + \theta\sqrt{x} + \theta\sqrt[3]{x} + \ldots,$$

et l'on en déduit

$$(3) \qquad \psi(x) = \sum \varepsilon_n T\left(\frac{x}{n}\right), \qquad \theta(x) = \sum \varepsilon_n \psi \sqrt[n]{x},$$

où

$$\varepsilon_n = 0,$$

si n est divisible par un carré;

$$\varepsilon_n = 1,$$

si $n = 1$ ou si n, n'étant divisible par aucun carré, contient un nombre pair de facteurs premiers;

$$\varepsilon_n = -1,$$

si n, n'étant divisible par aucun carré, contient un nombre impair de facteurs premiers.

Il résulte d'abord, de la définition même de $T(x)$, que

$$T(x) = \log \Gamma[E(x) + 1],$$

en désignant par $E(x)$, selon la coutume, le plus grand entier contenu dans x.

Soit maintenant C la constante d'Euler et posons

$$\omega(x) = x - \log(1 + x);$$

une formule bien connue nous donnera

$$\log \Gamma(x + 1) = \sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) - Cx,$$

la sommation s'étendant à tous les entiers positifs n.

Posons, d'autre part,

$$T'(x) = \log \Gamma(x + 1) + C[x - E(x)],$$

d'où

$$T'(x) = \sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) - CE(x).$$

Soit $\alpha(x)$ une fonction telle que

$$\alpha(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geqq 1; \qquad \alpha(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < 1;$$

on aura évidemment

$$E(x) = \alpha\left(\frac{x}{1}\right) + \alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots + \alpha\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots,$$

car le premier membre n'est autre chose que le nombre des entiers qui ne surpassent pas x, et chacun des termes du second membre est égal à 1, si n ne surpasse pas x, et à 0 dans le cas contraire.

Si donc nous posons

$$\psi'(x) = \omega(x) - C\alpha(x),$$

il viendra

$$(4) \qquad T'(x) = \psi'\left(\frac{x}{1}\right) + \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \psi'\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots.$$

Comparons maintenant $T(x)$ à $T'(x)$.

Nous aurons, pour $x > 1$,

$$\log \Gamma(x) < T(x) < \log \Gamma(x+1).$$

On a donc

$$T(x) > \log \Gamma(x+1) - \log x.$$

D'autre part, $x - E(x)$ est toujours compris entre 0 et 1, de sorte que

$$\log \Gamma(x+1) + C > T'(x) > \log \Gamma(x+1);$$

d'où enfin

$$(5) \qquad T'(x) > T(x) > T'(x) - C - \log x \quad (^1).$$

Des inégalités (5), nous pouvons déduire un premier résultat, c'est que, *si*

$$\frac{\psi(x)}{x}$$

tend vers une limite finie et déterminée, quand x croît indéfiniment, cette limite ne peut être que l'unité.

Pour le démontrer, j'observe d'abord que le rapport $\frac{\omega(x)}{x^2}$ décroît de $\frac{1}{2}$ à 0, quand x croît de 0 à $+\infty$; on a donc

$$(6) \qquad \omega(x) < \frac{x^2}{2}.$$

Envisageons maintenant la quantité

$$B = \sum \left(\frac{x^2}{n^2}\right),$$

---

(1) On peut même démontrer que

$$T'(x) - T(x) < [1 + \log(x+1)][x - E(x)];$$

mais cette inégalité m'est inutile pour mon objet.

n prenant sous le signe $\sum$ les valeurs $E(x)+1$, $E(x)+2$, $E(x)+3$, ..., *ad inf.* Comme on a évidemment

$$\int_{n}^{n+1} \frac{x^2\,dz}{z^2} > \frac{x^2}{(n+1)^2},$$

il vient

$$B < \int_{E(x)}^{\infty} \frac{x^2\,dz}{z^2}$$

ou

$$B < \frac{x^2}{E(x)} < \frac{x^2}{x-1}.$$

Or on a, en vertu de l'inégalité (6),

$$\frac{B}{2} > \sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) \qquad [n = E(x)+1,\ E(x)+2,\ \ldots,\ ad\ inf.].$$

Nous avons donc

$$\sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) < \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Définissons maintenant une fonction $\beta(x)$ par les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \alpha(x) = 1 && \text{pour} \quad x \geqq 1, \\ \beta(x) &= \omega(x) && \text{»} \quad x < 1, \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} &\beta\left(\frac{x}{1}\right) + \beta\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + \beta\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots \\ &\quad = \alpha\left(\frac{x}{1}\right) + \alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + \alpha\left[\frac{x}{E(x)}\right] \\ &\qquad + \omega\left[\frac{x}{E(x)+1}\right] + \omega\left[\frac{x}{E(x)+2}\right] + \ldots . \end{aligned}$$

La première ligne du second membre est égale à $E(x)$ et, par conséquent, plus petite que x; la seconde ligne est plus petite que

$$\frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Il vient donc

$$\beta\left(\frac{x}{1}\right) + \beta\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + \beta\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots < \frac{3x^2 - 2x}{2x - 3}.$$

Le second membre de cette inégalité, divisé par x, tend vers $\frac{3}{2}$ quand x croît indéfiniment ; nous pouvons donc prendre x assez grand pour que ce second membre soit plus petit que $2x$ et que

$$(7) \qquad \sum \beta\left(\frac{x}{n}\right) < 2x.$$

Cela posé, revenons aux inégalités (5). Comme le rapport de C, de $\log x$, ou de x à $T(x)$ ou à $T'(x)$, tend vers 0 quand x croît indéfiniment, ces inégalités montrent que l'on pourra prendre x_0 assez grand pour que l'on ait, pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0,

$$(8) \qquad (1+\varepsilon)\,T'(x) - 2bx > T(x) > (1-\varepsilon)\,T'(x) + 2bx,$$

et cela quels que soient les nombres positifs ε et b.

Je dis maintenant que l'on ne saurait avoir pour toutes les valeurs positives de x

$$(9) \qquad (1+\varepsilon)\,\psi'(x) < \psi(x) + b\beta(x),$$

car, s'il en était ainsi, il viendrait

$$(1+\varepsilon)\sum \psi'\left(\frac{x}{n}\right) < \sum \psi\left(\frac{x}{n}\right) + b\sum \beta\left(\frac{x}{n}\right)$$

ou *a fortiori*

$$(1+\varepsilon)\,T'(x) < T(x) + 2bx.$$

L'inégalité (8) n'aurait donc jamais lieu, même pour les grandes valeurs de x.

Je dis ensuite qu'on ne saurait trouver un nombre x_0 assez grand pour que l'on eût, pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0,

$$(10) \qquad (1+\varepsilon)\,\psi'(x) < \psi(x).$$

Si cela était, en effet, on pourrait trouver un nombre b assez grand pour satisfaire aux conditions suivantes. Pour

$$1 \leqq x \leqq x_0,$$

on devra avoir

$$b > (1+\varepsilon)\psi'(x) - \psi(x),$$

d'où

$$(1+\varepsilon)\psi' < \psi + b\beta(x), \qquad \text{car} \qquad \beta(x) = 1,$$

et, de plus,

$$b > 1+\varepsilon,$$

d'où, pour $x < 1$,

$$(1+\varepsilon)\psi' < \psi + b\beta(x), \qquad \text{car} \qquad \psi' = \beta = \omega, \quad \psi = 0.$$

L'inégalité (9) aurait donc lieu pour toutes les valeurs positives de x, ce qui est absurde.

Nous devons donc conclure que l'on a une infinité de fois (je veux dire pour une infinité de valeurs entières de x)

$$(1+\varepsilon)\psi'(x) > \psi(x).$$

On démontrerait absolument de la même manière :

1° Qu'on ne saurait avoir, pour toutes les valeurs positives de x,

$$(1-\varepsilon)\psi'(x) > \psi(x) - b\beta(x);$$

2° Qu'on aura une infinité de fois

$$(1-\varepsilon)\psi'(x) < \psi(x).$$

Ainsi, quelque petit que soit ε, le rapport $\frac{\psi}{\psi'}$ est une infinité de fois plus petit que $1+\varepsilon$ et une infinité de fois plus grand que $1-\varepsilon$.

Or le rapport $\frac{\psi'}{x}$ tend vers l'unité quand x tend vers $+\infty$.

Donc, *quelque petit que soit* ε, *le rapport* $\frac{\psi}{x}$ *est une infinité de*

fois plus petit que $1+\varepsilon$ *et une infinité de fois plus grand que* $1-\varepsilon$.

Si ce rapport tend vers une limite, cette limite ne peut donc être que l'unité. C. Q. F. D.

On peut déduire également des inégalités (5) une autre conséquence.

Envisageons l'expression suivante, introduite par M. Tchebicheff,

$$U(x) = T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right)$$

et posons de même

$$U'(x) = T'(x) + T'\left(\frac{x}{30}\right) - T'\left(\frac{x}{2}\right) - T'\left(\frac{x}{3}\right) - T'\left(\frac{x}{5}\right).$$

Nous pourrons conclure des inégalités (5) que

$$\begin{aligned} U'(x) - 2C - \log x - \log\frac{x}{30} \\ < U(x) < U'(x) + 3C + \log\frac{x}{2} + \log\frac{x}{3} + \log\frac{x}{5}. \end{aligned}$$

Ces inégalités ont lieu pour $x > 30$.

Mais M. Tchebicheff a montré ensuite que

$$U(x) = \sum \pm \psi\left(\frac{x}{\nu}\right),$$

en désignant par ν ceux des nombres entiers qui sont premiers avec 30 ou qui sont divisibles par 6, par 10 ou par 15; chaque terme est affecté du signe + dans le cas où le nombre ν correspondant est premier avec 30 et du signe − si ce nombre est divisible par 6, 10 ou 15; il en résulte d'ailleurs que, si l'on range les termes de façon que le nombre ν aille constamment en croissant, les termes seront alternativement positifs et négatifs.

Nous aurons de même

$$U'(x) = \sum \pm \psi'\left(\frac{x}{\nu}\right).$$

M. Tchebicheff a remarqué que la série

$$\sum \pm \psi\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

a ses termes alternativement positifs et négatifs et que leur valeur absolue va constamment et indéfiniment en décroissant, et il en a déduit les inégalités

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < \mathrm{U}(x) < \psi(x).$$

Au contraire, la série

$$\sum \pm \psi'\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

n'a pas des termes dont la valeur absolue va constamment en décroissant. Mais il est aisé de tourner cette difficulté. Nous avons, en effet,

$$\sum \pm \psi'\left(\frac{x}{\nu}\right) = \sum \pm \omega\left(\frac{x}{\nu}\right) - \mathrm{C}\sum \pm \alpha\left(\frac{x}{\nu}\right).$$

Les deux séries

$$\sum \pm \omega\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

et

$$\sum \pm \alpha\left(\frac{x}{\nu}\right) = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1 \mp 0 \pm 0 \mp \ldots$$

ont leurs termes alternativement positifs et négatifs et indéfiniment décroissants; on a donc

$$\omega(x) > \sum \pm \omega\left(\frac{x}{\nu}\right) > \omega(x) - \omega\left(\frac{x}{6}\right),$$

$$\sum \pm \alpha\left(\frac{x}{\nu}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad 0,$$

d'où

$$\omega(x) - \omega\left(\frac{x}{6}\right) - \mathrm{C} < \mathrm{U}'(x) < \omega(x)$$

ou, si $x > 6$,

$$\psi'(x) - \psi'\left(\frac{x}{6}\right) - \mathrm{C} < \mathrm{U}'(x) < \psi'(x) + \mathrm{C}.$$

Si nous comparons aux inégalités de M. Tchebicheff et à celles qui limitent la différence $U'(x) - U(x)$, il vient

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < \omega(x) + 4C + 3\log x - \log 30,$$

$$\psi(x) > \omega(x) - \omega\left(\frac{x}{6}\right) - 2C - 2\log x + \log 30.$$

Ces inégalités sont moins précises que celles de M. Tchebicheff. Elles n'ont donc d'autre intérêt que celui qui peut s'attacher à la méthode qui a permis de les obtenir.

Je signalerai, en passant, une formule d'où l'on pourrait tirer diverses inégalités analogues à celles de M. Tchebicheff; c'est la suivante :

$$T\left(\frac{x}{n}\right) - T\left(\frac{x}{n+1}\right) - T\left[\frac{x}{n(n+1)}\right] = \sum \pm \psi\left(\frac{x}{\nu}\right).$$

Dans la série du second membre figurent tous les nombres ν qui sont divisibles par n ou par $n+1$, et les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs.

2. Posons

$$V(x, n) = E\left(\frac{x}{1}\right) + E\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + E\left(\frac{x}{n}\right).$$

J observe que

$$\frac{E(x)}{p} - 1 < E\left(\frac{x}{p}\right) < \frac{E(x)}{p}.$$

Si nous posons alors

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

il viendra donc

$$E(x) S_n > V(x, n) > E(x) S_n - n + 1.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \log\frac{n}{n-1},$$

d'où

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n;$$

d'où, enfin,

$$E(x)(1+\log n) > V(x, n) > E(x)\log(n+1) - n + 1.$$

Si n est plus grand que $E(x)$, on a évidemment

$$V(x, n) = V[x, E(x)];$$

car

$$E\left(\frac{x}{p}\right) = 0 \qquad \text{si } p > E(x).$$

Si donc nous désignons par $V(x)$ la série indéfinie

$$V(x) = E\left(\frac{x}{1}\right) + E\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + E\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots,$$

on aura

$$V(x) = V[x, E(x)],$$

d'où

$$E(x)[1+\log E(x)] > V(x) > E(x)\log[E(x)+1] - E(x) + 1.$$

Ces inégalités montrent déjà que la valeur asymptotique de $V(x)$ est $x \log x$, c'est-à-dire que, quand x croît indéfiniment, on a

$$\lim \frac{V(x)}{x \log x} = 1.$$

Mais il est possible de trouver des inégalités plus serrées.

Combien, en effet, dans la série $V(x)$, y a-t-il de termes plus grands que p ou au moins égaux à p? Il y en a évidemment $E\left(\frac{x}{p}\right)$.

Combien y en a-t-il qui soient précisément égaux à p? Il y en a évidemment $E\left(\frac{x}{p}\right) - E\left(\frac{x}{p+1}\right)$.

Si nous posons

$$q = E\left(\frac{x}{p+1}\right),$$

les q premiers termes de $V(x)$ seront plus grands que p, nous aurons ensuite

$$E\left(\frac{x}{p}\right) \quad - E\left(\frac{x}{p+1}\right) \text{ termes égaux à } p.$$

$$E\left(\frac{x}{p-1}\right) - E\left(\frac{x}{p}\right) \quad \text{termes égaux à } p-1,$$

. . . . ,

$$E\left(\frac{x}{2}\right) \quad - E\left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{termes égaux à } 2,$$

$$E(x) \quad - E\left(\frac{x}{p}\right) \quad \text{termes égaux à } 1.$$

On en déduit

$$V(x) = V(x, q) + p\left[E\left(\frac{x}{p}\right) - E\left(\frac{x}{p+1}\right)\right] + (p-1)\left[E\left(\frac{x}{p-1}\right) - E\left(\frac{x}{p}\right)\right] + \ldots + 2\left[E\left(\frac{x}{2}\right) - E\left(\frac{x}{3}\right)\right] + \left[E(x) - E\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

ou bien

$$V(x) = V(x, q) + E(x) + E\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + E\left(\frac{x}{p}\right) - pE\left(\frac{x}{p+1}\right),$$

ou enfin

$$V(x) = V(x, q) + V(x, p) - pq.$$

Ainsi $V(x)$ est compris entre les limites suivantes

$$E(x)(S_p + S_q) - pq$$

et

$$E(x)(S_p + S_q) - pq - p - q + 2.$$

La différence entre ces deux limites est $p + q - 2$. Si donc p est la racine carrée de x calculée à une unité près par défaut, de sorte que

$$p = E(\sqrt{x}),$$

q sera au plus égal à $p + 2$, de sorte que la différence entre nos deux

limites sera de même ordre de grandeur que la racine carrée de x, tandis que, dans les inégalités que j'avais d'abord établies, la différence entre les deux limites était de même ordre de grandeur que x; car elle était égale à $E(x) - 1$.

De l'équation

$$\lim \frac{V(x)}{x \log x} = 1,$$

on peut déduire une nouvelle démonstration de ce fait que l'on a une infinité de fois

$$\psi(x) > ax,$$

si a est plus petit que 1, et une infinité de fois

$$\psi(x) < ax,$$

si a est plus grand que 1. Cette nouvelle démonstration se prête mieux que la première à une généralisation.

Supposons, en effet, que l'une de ces deux propositions ne soit pas vraie, la première, par exemple, c'est-à-dire que l'on n'ait pas une infinité de fois

$$\psi(x) > ax \qquad (a < 1).$$

Alors on pourra trouver un nombre x_0 assez grand pour que, pour $x > x_0$, on ait

$$\psi(x) < ax.$$

On pourra alors trouver un nombre b assez grand pour que, pour toutes les valeurs de x, plus grandes que 1, on ait

$$\psi(x) < ax + b - a;$$

en effet, la différence $\psi(x) - ax$, quand on fait varier x depuis 1 jusqu'à x_0, reste limitée.

Il viendrait alors

$$\psi(x) < aE(x) + b\alpha(x)$$

pour $x > 1$, puisque $\alpha(x) = 1$, $E(x) > x - 1$; et pour $x < 1$, on

aurait

$$\psi(x) = a\mathrm{E}(x) + b\alpha(x),$$

puisque

$$\psi(x) = \mathrm{E}(x) = \alpha(x) = 0.$$

Donc

$$\sum \psi\left(\frac{x}{n}\right) < a \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right) + b \sum \alpha\left(\frac{x}{n}\right)$$

ou

$$\mathrm{T}(x) < a\mathrm{V}(x) + b\mathrm{E}(x)$$

ou

$$\frac{\mathrm{T}(x)}{x \log x} < a \frac{\mathrm{V}(x)}{x \log x} + b \frac{\mathrm{E}(x)}{x \log x}.$$

Mais cette inégalité est impossible, puisque le premier membre tend vers 1 quand x croît indéfiniment et que les deux termes du second membre tendent respectivement vers $a < 1$ et vers 0.

La proposition que nous avions en vue est donc démontrée *per absurdum*.

Cette proposition étant établie pour $\psi(x)$, il est aisé d'en trouver d'analogues pour $\theta(x)$ et pour la fonction $\varphi(x)$ qui exprime combien il y a de nombres premiers qui ne surpassent pas x.

On a, en effet,

$$\psi(x) - 2\psi\sqrt{x} = \theta(x) - \theta\sqrt{x} + \theta\sqrt[3]{x} - \theta\sqrt[4]{x} + \ldots,$$

d'où

$$\psi(x) - 2\psi\sqrt{x} < \theta(x) < \psi(x).$$

Je dis alors qu'on aura une infinité de fois

$$\theta(x) < ax,$$

si $a > 1$; car on aura une infinité de fois

$$\theta(x) < \psi(x) < ax.$$

Je dis maintenant qu'on aura une infinité de fois

$$\theta(x) > ax,$$

si $a < 1$. En effet, il résulte des inégalités de M. Tchebicheff que l'on peut prendre x assez grand pour que

$$\psi(x) < \frac{6}{5}x;$$

on a donc, si x est assez grand,

$$\theta(x) > \psi(x) - 2\psi\sqrt{x} > \psi(x) - \frac{12}{5}\sqrt{x}$$

et, par conséquent, une infinité de fois

$$\theta(x) > ax - \frac{12}{5}\sqrt{x},$$

si $a < 1$, et une infinité de fois

$$\theta(x) > a'x,$$

si $a' < a$. C. Q. F. D.

Donc, si $\frac{\theta(x)}{x}$ tend vers une limite, cette limite ne peut être que l'unité.

5. Passons à la fonction $\varphi(x)$ qui exprime combien il y a de nombres premiers plus petits ou égaux à x.

On a, par définition,

$$\theta(x) = \sum \log p \qquad (p \leqq x)$$

et

$$\varphi(x) = \sum (1);$$

tous les termes du second membre sont égaux à 1, et à chaque nombre premier p plus petit que x correspond un de ces termes. On aura donc

$$\varphi(x)\log x = \sum \log x$$

et, puisque

$$\log x \geqq \log p,$$

on aura

$$\varphi(x)\log x > \theta(x).$$

Comme on a une infinité de fois

$$\theta(x) > ax, \qquad \text{si} \qquad a < 1,$$

on aura une infinité de fois

$$\varphi(x) > \frac{ax}{\log x}.$$

Pour trouver une autre limite de $\varphi(x)$, je vais faire usage d'un artifice qui est dû à M. Sylvester.

Comme il est clair que le $n^{\text{ième}}$ nombre premier est plus grand que le $n^{\text{ième}}$ nombre entier, il viendra

$$\mathrm{T}[\varphi(x)] < \theta(x).$$

Or on a, si b est plus petit que 1 et à partir d'un certain rang,

$$\mathrm{T}(x) > bx\log x.$$

On aura donc, si x est assez grand,

$$\theta(x) > b\varphi(x)\log\varphi(x).$$

Or

$$\log\varphi(x) > \log\theta(x) - \log\log x;$$

donc

$$\theta(x) > b\varphi(x)[\log\theta(x) - \log\log x]$$

et

$$\varphi(x) < \frac{1}{b}\,\frac{\theta(x)}{\log\theta(x) - \log\log x}.$$

Or on a une infinité de fois

$$\theta(x) < ax, \qquad \text{si} \qquad a > 1.$$

Or la fonction

$$\frac{y}{\log y - \log\log x},$$

considérée comme fonction de y, est croissante pourvu que

$$y > 1 + \log x.$$

Or, si x est assez grand, on aura certainement

$$\theta(x) > 1 + \log x$$

et, par conséquent, on aura une infinité de fois

$$\frac{\theta(x)}{\log\theta(x) - \log\log x} < \frac{ax}{\log(ax) - \log\log x}.$$

Il est clair que le rapport de

$$\frac{ax}{\log(ax) - \log\log x} \quad \text{à} \quad \frac{ax}{\log x}$$

tend vers l'unité quand x croît indéfiniment. Si donc x est assez grand et $a' > a$, on aura

$$\frac{ax}{\log(ax) - \log\log x} < \frac{a'x}{\log x}.$$

On aura donc une infinité de fois

$$\varphi(x) < \frac{a'}{b}\frac{x}{\log x}.$$

Or, si c est un nombre quelconque plus grand que 1, on pourra toujours trouver trois nombres a, a', b, tels que

$$c = \frac{a'}{b}, \qquad a' > a > 1 > b.$$

On aura donc une infinité de fois

$$\varphi(x) < \frac{cx}{\log x}.$$

Si donc le rapport de $\varphi(x)$ à $\frac{x}{\log x}$ tend vers une limite, cette limite

ne peut être que l'unité. Ce résultat est contenu comme cas très particulier dans les premières propositions de M. Tchebicheff, et je n'ai cru devoir en donner une nouvelle démonstration que parce qu'elle se prête mieux à la généralisation que j'ai en vue.

Ce raisonnement est dû à M. Sylvester; mes inégalités sont moins précises que celles de l'éminent géomètre anglais, mais elles sont analogues et me suffisent pour mon objet.

Posons, à l'exemple de M. Tchebicheff,

$$A = 0,9212.$$

Les mêmes raisonnements, combinés aux inégalités de M. Tchebicheff, conduiront facilement aux résultats suivants :

On aura, à partir d'une certaine valeur de x,

$$\varphi(x) < \frac{ax}{\log x}, \qquad \text{si} \qquad a > \frac{6}{5}A$$

et

$$\varphi(x) > \frac{bx}{\log x}, \qquad \text{si} \qquad b < A.$$

4. Avant d'étendre les résultats de M. Tchebicheff aux nombres idéaux, je vais rappeler succinctement la définition et les propriétés de ces nombres, en renvoyant, pour plus de détails, à l'Ouvrage de M. Dedekind sur les nombres entiers algébriques (Paris, Gauthier-Villars, 1877).

On appelle nombre algébrique toute racine de l'équation

$$(1) \qquad a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dont les coefficients a_i sont des entiers ordinaires. Ce nombre algébrique est dit *entier* si le coefficient a_m est égal à 1.

Considérons maintenant tous les nombres de la forme suivante

$$(2) \qquad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1},$$

où les coefficients α_i sont des nombres rationnels ordinaires, et où x satisfait à l'équation (1). Ce sont évidemment des nombres algébriques,

et nous dirons qu'ils appartiennent tous au corps défini par l'équation (1).

Parmi les nombres algébriques qui font partie d'un corps, nous distinguerons ceux qui sont entiers, et nous dirons qu'ils appartiennent à un *système* de nombres complexes, système défini par l'équation (1).

Il résulte de ces définitions que la somme et le produit de deux nombres complexes d'un système sont deux nombres complexes du même système.

Pour éclaircir ces définitions, supposons que l'équation (1) s'écrive

$$x^2 + 3 = 0;$$

les nombres du corps correspondant seront de la forme

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{-3},$$

α_0 et α_1 étant rationnels. Si α_0 et α_1 sont entiers, le nombre y sera certainement un nombre entier algébrique et appartiendra, par conséquent, au système de nombres complexes considéré. Mais cette condition n'est pas nécessaire. Si, en effet, $2\alpha_0$ et $2\alpha_1$ sont deux entiers impairs, nous aurons

$$4\alpha_0^2 \equiv 4\alpha_1^2 \equiv 1 \pmod 4$$

et, par conséquent,

$$4\alpha_0^2 + 12\alpha_1^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

Le nombre y sera donc entier algébrique et fera partie du système, puisqu'il satisfera à l'équation

$$y^2 - 2\alpha_0 y + (\alpha_0^2 + 3\alpha_1^2) = 0$$

dont les coefficients sont entiers.

Cela posé, considérons p nombres complexes d'un même système

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_p.$$

Soient ensuite

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

p nombres complexes arbitraires appartenant encore au même système.

Le nombre

$$z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_p y_p$$

fera évidemment encore partie de ce système. L'ensemble de tous les nombres complexes z que l'on obtient, en donnant aux coefficients complexes arbitraires α_i toutes les valeurs possibles, s'appellera un *idéal* et les p nombres $y_1, y_2, \ldots, y_p$ formeront la *trame* de l'idéal.

Deux nombres complexes u_1 et u_2 sont *congruents* par rapport à un idéal, quand leur différence $u_1 - u_2$ fait partie de cet idéal; on peut dire aussi qu'ils appartiennent à la même *classe* par rapport à cet idéal. Le nombre des classes entre lesquelles les nombres complexes se répartissent ainsi par rapport à un idéal donné s'appelle la *norme* de cet idéal.

Un idéal A est *divisible* par un autre idéal A′ quand tous les nombres complexes qui appartiennent à A font aussi partie de A′.

Définissons maintenant le produit de deux idéaux A et B.

Supposons que la trame de A se compose de nombres complexes

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_p$$

et celle de B des nombres complexes

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_q;$$

celle du produit AB se composera des pq nombres complexes

$$z_i y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, p).$$

Il est clair que le produit AB est divisible par A et par B; mais M. Dedekind a démontré la réciproque, à savoir que, si un idéal B est divisible par A, il sera le produit de A par un autre idéal C.

La norme du produit de deux idéaux est égale au produit des normes de ces idéaux.

L'idéal unité est celui dont la trame se réduit au nombre 1 et qui se compose, par conséquent, de tous les nombres complexes du système. Sa norme est égale à 1. Un idéal quelconque est divisible par l'idéal unité.

Un idéal est *premier* s'il n'est divisible que par lui-même ou par l'idéal unité. M. Dedekind a alors démontré son théorème fondamental : *Un idéal quelconque peut toujours être décomposé d'une manière et d'une seule en facteurs idéaux premiers.*

Il peut arriver que deux trames

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_p,$$
$$y'_1, \quad y'_2, \quad \ldots, \quad y'_q$$

soient équivalentes et donnent naissance au même idéal. On peut donc se proposer le problème suivant : Étant donné un idéal défini par sa trame, réduire cette trame à sa plus simple expression, c'est-à-dire la remplacer par une autre trame équivalente, de façon à abaisser autant que possible le nombre des entiers complexes dont elle se compose. Ce nombre peut généralement être réduit à deux et quelquefois à un. Dans ce dernier cas, l'idéal se compose de tous les multiples de l'entier complexe unique qui forme la trame, et l'on dit que c'est un idéal *principal*.

Considérons maintenant trois idéaux A, B et C qui ne soient pas principaux et supposons que les produits AC et BC soient des idéaux principaux. Nous dirons alors que les deux idéaux principaux A et B appartiennent à la même classe. Le nombre des classes entre lesquelles se répartissent ainsi les idéaux (et qu'il ne faut pas confondre avec les classes entre lesquelles se répartissent les nombres complexes par rapport à un idéal donné) est fini.

Nous considérerons en particulier le système d'idéaux que l'on obtient en partant de l'équation

$$x^2 + 1 = 0.$$

Le système des nombres complexes correspondants se composera donc

de tous les nombres complexes de Gauss

$$a + bi,$$

où a et b sont entiers.

Il n'y a alors qu'une seule classe d'idéaux, et tous les idéaux sont principaux. Un idéal quelconque se composera donc de tous les multiples d'un nombre complexe $a + bi$, qui formera sa trame, et il aura pour norme $a^2 + b^2$ et pourra être représenté lui-même par le symbole $a + bi$. Mais il importe de remarquer que deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ peuvent donner naissance au même idéal.

Si, en effet,

$$c = -a, \qquad d = -b,$$

ou si

$$c = -b, \qquad d = a,$$

ou si

$$c = b, \qquad d = -a,$$

$c + di$ est multiple de $a + bi$ et $a + bi$ multiple de $c + di$, de sorte que les deux idéaux représentés par les symboles $a + bi$ et $c + di$ sont identiques; c'est d'ailleurs le seul cas où cela ait lieu.

Les idéaux premiers sont de deux sortes : les uns ont pour norme un nombre premier ordinaire de la forme $4n + 1$, les autres ont pour norme le *carré* d'un nombre premier ordinaire de la forme $4n + 3$.

Remarquons que, si p est un nombre premier ordinaire de la forme $4n + 1$, il y aura deux idéaux premiers de norme p; si, au contraire, p est premier de la forme $4n + 3$, il n'y aura qu'un seul idéal premier de norme p^2.

En effet, un nombre premier p de la forme $4n + 1$ peut, d'une manière et d'une seule, se décomposer en une somme de deux carrés

$$p = x^2 + y^2,$$

et les deux idéaux $x + iy$ et $x - iy$ sont les deux idéaux premiers de norme p.

Si, au contraire, p est de la forme $4n + 3$, il n'y aura qu'un idéal premier de norme p^2, qui a pour trame le nombre p lui-même, et est représenté par le symbole p.

Il y a encore un idéal premier qui a pour norme 2 et qui ne rentre dans aucune de ces deux catégories : c'est celui auquel on peut donner pour symbole $1 + i$ ou $1 - i$.

Ainsi, *le nombre des idéaux premiers dont la norme ne surpasse pas x est égal à deux fois le nombre des nombres premiers ordinaires de la forme $4n + 1$ qui ne surpassent pas x, plus le nombre des nombres premiers ordinaires de la forme $4n + 3$ qui ne surpassent pas $\sqrt{x}$, plus* 1.

Soit $m + ni$ le symbole d'un idéal quelconque; nous savons que cet idéal ne change pas quand on change m et n en $-m$ et $-n$, ou bien en $-n$ et m, ou bien encore en $-n$ et $-m$. On obtiendra donc tous les idéaux possibles, et l'on n'obtiendra chacun d'eux qu'une fois, en donnant à m et à n toutes les valeurs entières qui satisfont aux conditions

$$m \geqq 1, \qquad n \geqq 0.$$

Revenons au cas général.

Soient A et B deux idéaux quelconques, principaux ou non. Le symbole

$$\sqrt[p]{\frac{A}{B}}$$

n'a, en général, aucun sens. Nous conviendrons, néanmoins, de définir la norme de ce symbole en disant qu'elle est égale à la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de A, divisée par la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de B.

Si l'idéal A est principal, il se compose de tous les multiples d'un nombre entier complexe y; nous dirons que la norme de ce nombre complexe y est égale à celle de l'idéal principal auquel il a donné naissance. Si ce nombre complexe

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1},$$

est réel, ce qui arrive si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-1}$, sa norme se réduit à y^m, m étant le degré de l'équation (1). Si donc y est un nombre réel *non entier*, nous pourrons encore dire que sa norme est égale à y^m; et

nous conviendrons enfin de dire, si y est un nombre réel non entier et A un idéal, que la norme de $\sqrt[p]{\frac{y}{A}}$ est égale à la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de y, divisée par la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de A.

5. Occupons-nous maintenant d'étendre à ces idéaux premiers les théorèmes de M. Tchebicheff, en employant des notations analogues.

Soit x un idéal quelconque.

Soit $T(x)$ la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux dont la norme ne surpasse pas celle de x.

Soit $\theta(x)$ la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux *premiers* dont la norme ne surpasse pas celle de x.

Il résulte d'abord de là que si x_0 et x_1 sont deux idéaux de même norme, on aura

$$T(x_0) = T(x_1), \qquad \theta(x_0) = \theta(x_1).$$

Il peut arriver qu'on ne sache pas ce qu'on doit entendre par $\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$; mais nous pourrons toujours désigner par $\theta\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux premiers dont la norme ne surpasse pas la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de x divisée par la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de n.

Je dis alors que l'on aura

$$(1) \qquad T(x) = \sum \theta\sqrt[m]{\frac{x}{n}},$$

la sommation étant étendue, d'une part, à tous les entiers réels positifs m, et, d'autre part, à tous les idéaux n du système.

Soit, en effet, $E(x)$ le nombre des idéaux dont la norme ne surpasse pas celle de x, et, par conséquent, $E\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ le nombre des idéaux dont la norme ne surpasse pas la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de x divisée par la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de n.

Soit $\alpha\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ une fonction définie comme il suit :

$$\alpha\sqrt[m]{\frac{x}{n}} = 0, \qquad \text{si norme } \sqrt[m]{\frac{x}{n}} < 1,$$

$$\alpha\sqrt[m]{\frac{x}{n}} = 1, \qquad \text{si norme } \sqrt[m]{\frac{x}{n}} \geq 1,$$

la norme de $\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ étant définie comme au paragraphe précédent.

Il résulte de cette définition que

$$\alpha\sqrt[m]{\frac{x}{n}} = \alpha\left(\frac{x}{n}\right).$$

Toutes ces définitions s'étendent immédiatement au cas où x, au lieu d'être un idéal, est un nombre réel ordinaire positif entier ou non entier; nous avons, en effet, défini au paragraphe précédent ce qu'on doit entendre par la norme de $\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$.

Cela posé, on a évidemment

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{E}(x) = \sum \alpha\left(\frac{x}{n}\right).$$

En effet, ceux des termes du second membre qui seront égaux à 1 et non pas à 0 seront ceux qui seront tels que

$$\text{norme } n \leq \text{norme } x,$$

et leur nombre sera précisément $\mathrm{E}(x)$.

Cela posé, je dis que

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \mathrm{T}(x) = \sum \left[\mathrm{E}\left(\frac{x}{p}\right)\log \mathrm{n}p + \mathrm{E}\left(\frac{x}{p^2}\right)\log \mathrm{n}p + \ldots\right] \\ \qquad\quad = \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{p^m}\right)\log \mathrm{n}p. \end{cases}$$

Nous écrivons, pour abréger, $\log n p$ pour

$$\log \text{ norme de } p.$$

La sommation du second membre doit être étendue à tous les idéaux premiers p et à tous les nombres entiers réels et positifs m.

En effet, $T(x)$ est, par définition, la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux dont la norme ne surpasse pas celle de x. Si nous supposons tous ces idéaux décomposés en leurs facteurs premiers, $T(x)$ sera la somme des logarithmes des normes de tous ces facteurs premiers.

Combien de fois entrera, dans cette somme, le logarithme de la norme de p? Il y entrera :

1° Autant de fois qu'il y aura d'idéaux divisibles par p. Il y en aura évidemment $E\left(\frac{x}{p}\right)$; car, si y est un idéal divisible par p et dont la norme ne surpasse pas celle de x, on pourra trouver un idéal z tel que $zp = y$, et dont la norme ne surpasse pas celle de $\frac{x}{p}$;

2° Autant de fois qu'il y aura d'idéaux divisibles par p^2, c'est-à-dire $E\left(\frac{x}{p^2}\right)$ fois; car un idéal divisible par p^2 contient le facteur p deux fois et non pas seulement une fois;

3° Autant de fois qu'il y aura d'idéaux divisibles par p^3, c'est-à-dire $E\left(\frac{x}{p^3}\right)$ fois; car un pareil idéal contient le facteur p non pas deux fois, mais trois fois.

Et ainsi de suite.

La formule (3) est donc démontrée.

On aura, d'autre part,

$$(4) \qquad \theta(x) = \sum \alpha\left(\frac{x}{p}\right) \log n p,$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux premiers p.

En effet, $\theta(x)$ est la somme des logarithmes des normes des idéaux premiers dont la norme ne dépasse pas x. Le terme $\log n p$ devra donc

entrer dans l'expression de $\theta(x)$, avec le coefficient 1 ou avec le coefficient 0, suivant que la norme de p ne surpassera pas ou surpassera celle de x, c'est-à-dire suivant que $\alpha\left(\frac{x}{p}\right)$ sera égal à 1 ou à 0.

On en déduit

$$\theta\sqrt[m]{\frac{x}{n}} = \sum \alpha\left(\frac{1}{p}\sqrt[m]{\frac{x}{n}}\right)\log \mathrm{n}p = \sum \alpha\left(\frac{x}{np^m}\right)\log \mathrm{n}p,$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux premiers p,

$$\sum \theta\sqrt[m]{\frac{x}{n}} = \sum \alpha\left(\frac{x}{np^m}\right)\log \mathrm{n}p,$$

la sommation étant étendue : 1° à tous les idéaux premiers p; 2° à tous les idéaux possibles n; 3° à tous les entiers réels et positifs m.

D'autre part, la combinaison des formules (2) et (3) donne

$$\mathrm{T}(x) = \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{p^m}\right)\log \mathrm{n}p = \sum \alpha\left(\frac{x}{np^m}\right)\log \mathrm{n}p.$$

La formule (1) est donc démontrée. Je l'écrirai sous la forme suivante, en introduisant une fonction auxiliaire $\psi(x)$:

$$\mathrm{T}(x) = \sum \psi\left(\frac{x}{n}\right), \qquad \psi(x) = \sum \theta\sqrt[m]{x}.$$

6. Bornons-nous maintenant aux idéaux qui se rapportent à l'équation $x^2 + 1 = 0$, et qui, comme nous l'avons vu, peuvent être représentés par le symbole $m + ni$.

Nous aurons besoin de savoir calculer la valeur asymptotique pour x très grand de certaines sommes de la forme suivante

$$\sum \varphi(m, n),$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux $m + ni$ dont la norme ne

dépasse pas celle d'un nombre réel donné x, c'est-à-dire à tous les systèmes de valeurs de m et de n telles que

$$(1) \qquad m \geqq 1, \qquad n \geqq 0, \qquad m^2 + n^2 \leqq x^2.$$

Supposons d'abord que la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ soit constamment positive et croissante, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi(\xi + h, \eta + k) > \varphi(\xi, \eta),$$

si h et k sont positifs.

On aura alors

$$\varphi(m, n) < \int\int \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta < \varphi(m + 1, n + 1),$$

l'intégrale double étant étendue à la surface du carré qui a pour sommets les quatre points

$$(\xi = m, \eta = n;\ \xi = m + 1, \eta = n;$$
$$\xi = m, \eta = n + 1;\ \xi = m + 1, \eta = n + 1),$$

et que j'appellerai, pour abréger, le carré (m, n).

Nous aurons donc

$$\sum \varphi(m, n) < \int\int \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les carrés (m, n) satisfaisant aux conditions

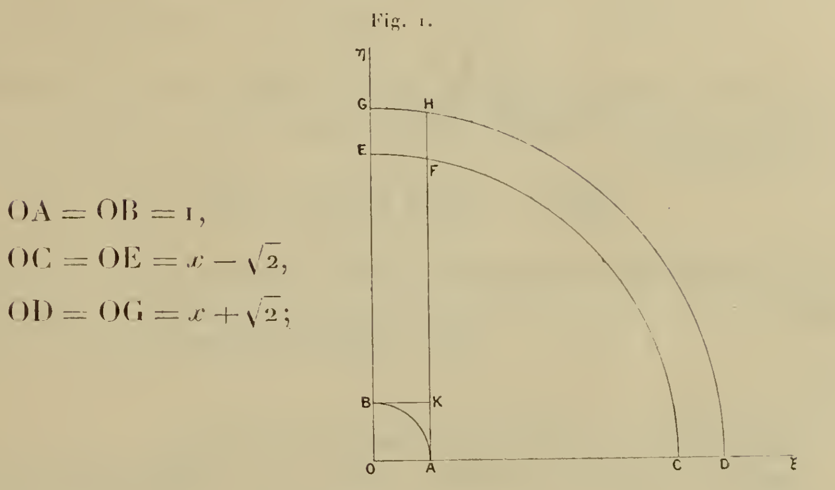
$$(1) \qquad m^2 + n^2 = x^2, \qquad m \geqq 1, \qquad n \geqq 0.$$

Or tous ces carrés sont tout entiers contenus dans l'aire limitée par

les droites $\xi = 1$, $\eta = 0$ et par le cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = (x + \sqrt{2})^2,$$

Fig. 1.



$$OA = OB = 1,$$
$$OC = OE = x - \sqrt{2},$$
$$OD = OG = x + \sqrt{2};$$

c'est-à-dire dans l'aire ACDHFKA de la *fig.* 1.

Ils sont donc tout entiers contenus dans l'aire ACDHGEBA limitée par les deux axes et par les circonférences

$$\xi^2 + \eta^2 = (x + \sqrt{2})^2, \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

aire que j'appellerai, pour abréger, l'aire $\mathcal{A}$. Notre somme

$$\sum \varphi(m, n)$$

est donc plus petite que l'intégrale double étendue à l'aire $\mathcal{A}$.

Cherchons maintenant une limite inférieure de notre somme

$$\sum \varphi(m, n),$$

cette somme doit être étendue à tous les idéaux tels que

$$m \geqq 1, \qquad n \geqq 0 \qquad (m^2 + n^2) \leqq x^2;$$

mais, comme φ est essentiellement positif par hypothèse, cette somme sera plus grande que la même somme étendue aux mêmes combinaisons de valeurs de m et de n, à l'exception des suivantes

$$m = 1, \qquad n = 1; \qquad m = m, \qquad n = 0.$$

De plus, chacun des termes que nous aurons conservés sera plus grand que l'intégrale double étendue au carré $(m-1, n-1)$.

Il vient donc

$$\sum \varphi(m, n) > \int\int \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les carrés $(m-1, n-1)$ tels que

$$m \geqq 1, \qquad n \geqq 1 \qquad (m^2+n^2) \leqq x^2,$$

à l'exception du carré $(0, 0)$.

Soit $\mathcal{B}$ l'aire recouverte par l'ensemble de ces carrés.

Appelons $\mathcal{A}'$ l'aire ACFEBKA, limitée par les deux axes, par les côtés BK et AC du carré $(0, 0)$ et par le cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = (x - \sqrt{2})^2;$$

cette aire $\mathcal{A}'$ sera tout entière contenue dans l'aire $\mathcal{B}$.

Notre somme

$$\sum \varphi(m, n)$$

sera donc plus grande que l'intégrale double étendue à l'aire $\mathcal{A}'$.

Si donc nous désignons par A l'intégrale double étendue à l'aire $\mathcal{A}$, par A' cette même intégrale étendue à l'aire $\mathcal{A}'$, on aura

$$\mathrm{A} > \sum \varphi(m, n) > \mathrm{A}'.$$

La différence $\mathrm{A} - \mathrm{A}'$ est l'intégrale double étendue d'une part au triangle curviligne ABK, d'autre part à l'aire CDHGEFC. Admettons que le rapport

$$\frac{\mathrm{A} - \mathrm{A}'}{\mathrm{A}}$$

tende vers o quand x croît indéfiniment; il sera aisé de vérifier que cette condition est remplie dans les diverses applications que je ferai plus loin.

On aura alors

$$\lim \frac{\Sigma\varphi(m, n)}{A} = 1,$$

ce que nous exprimerons en disant que l'intégrale A est la valeur asymptotique de la somme

$$\sum \varphi(m, n).$$

Supposons maintenant que la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ soit constamment positive et décroissante, c'est-à-dire que

$$\varphi(\xi + h, \eta + k) < \varphi(\xi, \eta),$$

si h et k sont positifs.

On aura alors

$$\varphi(m, n) > \int\int \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta > \varphi(m + 1, n + 1),$$

l'intégrale double étant étendue au carré (m, n).

On aura donc

$$\sum \varphi(m, n) > \int\int \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

l'intégrale étant étendue à tous les carrés (m, n) tels que

$$m \geqq 1, \qquad n \geqq 0 \qquad (m^2 + n^2) < x^2,$$

ou à toute aire contenue tout entière dans l'aire recouverte par l'ensemble de ces carrés.

Tel est le cas de l'aire ACFKA que j'appellerai ε et qui est limitée par les droites $\xi = 1$, $\eta = 0$ et par le cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = (x - \sqrt{2})^2.$$

Si donc je désigne par C l'intégrale double étendue à l'aire $\mathcal{C}$, il viendra

$$\sum \varphi(m, n) > \mathrm{C}.$$

Soit maintenant

$$\sum \varphi(m, n) = \sum_1 + \sum_2 .$$

La somme

$$\sum \varphi(m, n)$$

toujours étendue à toutes les combinaisons de valeurs de m et de n satisfaisant aux conditions (1), Σ_2 est la même somme étendue aux systèmes de valeurs de m et de n qui satisfont aux conditions

$$m = n = 1 \tag{2}$$

ou

$$n = 0. \tag{2 bis}$$

Σ_1 est encore la même somme étendue à tous les systèmes des valeurs qui satisfont aux conditions (1), sans satisfaire aux conditions (2) ou (2 *bis*). On a alors

$$\sum_1 < \int\int \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les carrés $(m-1, n-1)$ tels que

$$m \geqq 1, \qquad n \geqq 1 \qquad (m^2+n^2) \leqq x^2,$$

à l'exception du carré (0, 0).

Tous ces carrés sont tout entiers à l'intérieur de l'aire $\mathcal{A}$.

On a donc

$$\sum_1 < \mathrm{A},$$

et par conséquent

$$\mathrm{C} < \sum \varphi(m, n) < \mathrm{A} + \sum_2 .$$

Or, dans l'unique application que nous ferons $\left[\text{en supposant } \varphi(m, n) = \frac{1}{m^2 + n^2}\right]$, il est facile de voir que Σ_2 et $C - A$ restent finies quand x croît indéfiniment, tandis que les deux intégrales C et A croissent au delà de toute limite.

On aura donc encore

$$\lim \frac{\Sigma\varphi(m, n)}{A} = 1;$$

c'est-à-dire que A sera encore la valeur asymptotique de $\Sigma\varphi(m, n)$.

Soit d'abord

$$\varphi(m, n) = \log(m^2 + n^2);$$

d'où

$$\sum \varphi(m, n) = T(x).$$

La fonction $\log(m^2 + n^2)$ est positive et croissante dans l'aire $\mathcal{A}$.

La valeur asymptotique de $T(x)$ sera donc l'intégrale

$$A = \int\int \log(\xi^2 + \eta^2)\, d\xi\, d\eta,$$

étendue à l'aire A, c'est-à-dire

$$A = \pi\left[\frac{(x + \sqrt{2})^2}{2} \log(x + \sqrt{2}) - \frac{(x + \sqrt{2})^2}{4}\right],$$

ou bien encore

$$\frac{\pi}{2} x^2 \log x,$$

puisque

$$\lim \frac{1}{A} \frac{\pi}{2} x^2 \log x = 1 \qquad (\text{pour } x = \infty).$$

Soit maintenant

$$\varphi(m, n) = 1;$$

d'où

$$\sum \varphi(m, n) = E(x).$$

La valeur asymptotique de $E(x)$ sera l'intégrale

$$A = \int\int d\xi\, d\eta,$$

étendue à l'aire $\mathcal{A}$, c'est-à-dire

$$A = \frac{\pi}{4}\left[(x+\sqrt{2})^2 - 1\right];$$

ou bien encore

$$\frac{\pi x^2}{4},$$

puisque

$$\lim \frac{1}{A}\,\frac{\pi x^2}{4} = 1 \qquad (\text{pour } x = \infty).$$

Soit enfin

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{m^2+n^2}.$$

La fonction φ est cette fois décroissante; la valeur asymptotique de

$$\sum \frac{1}{m^2+n^2},$$

sera l'intégrale

$$A = \int\int \frac{d\xi\, d\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

étendue à l'aire $\mathcal{A}$; c'est-à-dire

$$A = \frac{\pi}{2}\log(x+\sqrt{2}),$$

ou plus simplement

$$\frac{\pi}{2}\log x,$$

puisque

$$\lim \frac{\log x}{\log(x+\sqrt{2})} = 1 \qquad (\text{pour } x = \infty).$$

Soit maintenant

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

il viendra

$$\text{valeur asymptotique} \sum \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}} = \int\int \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

L'intégrale étendue à l'aire $\mathcal{A}$ est égale à

$$\frac{\pi}{2}(x+\sqrt{2}-1).$$

La valeur asymptotique de $\sum \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$ est donc égale à

$$\frac{\pi x}{2},$$

puisque

$$\lim \frac{x}{x+\sqrt{2}-1} = 1.$$

J'aurai besoin pour ce qui va suivre, non seulement de la valeur asymptotique de $E(x)$, mais d'une limite supérieure et d'une limite inférieure de cette quantité.

Or, d'après ce qui précède, $E(x)$ est plus petit que l'intégrale

$$\int\int d\xi\, d\eta,$$

étendue à l'aire $\mathcal{A}$ et plus grande que la même intégrale étendue à l'aire $\mathcal{A}'$. On a donc

$$\frac{\pi}{4}(x-\sqrt{2})^2 - 1 < E(x) < \frac{\pi}{4}(x+\sqrt{2})^2 - \frac{\pi}{4}.$$

Nous avons supposé que x est un nombre réel positif; si nous voulons avoir deux limites de l'expression

$$E\left(\frac{x}{m+in}\right),$$

il faut, d'après la définition de cette expression, remplacer dans les iné-

galités qui précèdent x par le nombre réel positif qui a pour norme la norme de x divisée par celle de $m+in$, c'est-à-dire par le nombre réel positif

$$\frac{x}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Il vient donc

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{m^2+n^2}}-\sqrt{2}\right)^2-1<\mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right)<\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{m^2+n^2}}+\sqrt{2}\right)^2-\frac{\pi}{4}$$

ou

$$\frac{\pi}{4}\frac{x^2}{m^2+n^2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\frac{x}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{\pi}{2}-1$$
$$<\mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right)<\frac{\pi}{4}\frac{x^2}{m^2+n^2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\frac{x}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{\pi}{4}.$$

Il vient ainsi

$$\mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right)-\frac{\mathrm{E}(x)}{m^2+n^2}$$
$$<\frac{\pi\sqrt{2}\,x}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{1}{m^2+n^2}\right)+\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{1}{m^2+n^2}$$

et

$$\mathrm{E}\left(\frac{m+in}{x}\right)-\frac{\mathrm{E}(x)}{m^2+n^2}$$
$$>\frac{-\pi\sqrt{2}\,x}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{1}{m^2+n^2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{\pi}{4}\frac{1}{m^2+n^2}$$

ou, *a fortiori*,

$$(1)\qquad \left|\mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right)-\frac{\mathrm{E}(x)}{m^2+n^2}\right|<\frac{\pi x\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{\pi}{4}.$$

7. Nous allons nous proposer d'évaluer la somme

$$\sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right),$$

somme étendue à tous les idéaux $m+in$ possibles. Il suffira évidem-

ment de l'étendre à tous les idéaux dont la norme ne surpasse pas celle de x. Car, si la norme de $m+in$ était plus grande que celle de x, on aurait

$$\mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right)=0.$$

Étendons, par conséquent, la sommation aux seuls idéaux tels que

$$\text{norme}(m+in) \leqq \text{norme}\, x.$$

Je dis qu'on aura asymptotiquement pour x très grand

$$(2) \qquad \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right)=\sum \frac{\mathrm{E}(x)}{m^2+n^2};$$

je veux dire que le rapport des deux membres tend vers l'unité quand x croît indéfiniment.

En effet, la différence entre les deux membres de (2) est, en vertu de l'inégalité (1), plus petite en valeur absolue que

$$(3) \qquad \pi x\sqrt{2}\sum \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}+\sum \frac{\pi}{4}.$$

Il est facile de trouver la valeur asymptotique de cette expression (3), car, d'une part, nous connaissons celle de $\sum \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$ qui est

$$\frac{\pi x}{2},$$

et d'autre part

$$\sum \frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\mathrm{E}(x)$$

a pour valeur asymptotique

$$\frac{\pi^2 x^2}{16}.$$

La valeur asymptotique de (3) est donc

$$\frac{\pi^2 x^2}{16}(8\sqrt{2}+1).$$

Considérons maintenant le second membre de (2); sa valeur asymptotique sera

$$E(x)\sum\frac{1}{m^2+n^2}=\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)=\frac{\pi^2}{8}x^2\log x.$$

La comparaison de cette valeur asymptotique avec celle de (3) montre que le rapport de (3) au second membre de (2) a pour limite o et par conséquent que le rapport des deux membres de (2) a pour limite 1. C.Q.F.D.

Donc l'expression

$$\sum E\left(\frac{x}{m+in}\right)$$

a pour valeur asymptotique

$$\frac{\pi^2}{8}x^2\log x.$$

8. On peut tirer de là des conséquences analogues à celles du n° **2**.

Je me propose de démontrer que, si $a>1$, on aura une infinité de fois

$$(1)\qquad \psi(x)<\frac{4a}{\pi}E(x).$$

Si cela n'était pas vrai, en effet, on pourrait trouver un nombre x_0 assez grand pour que, pour toutes les valeurs de x plus grandes que x_0, on eût

$$\psi(x)>\frac{4a}{\pi}E(x);$$

on pourrait alors trouver un nombre b assez grand pour que,

$$(\text{pour } x_0>x>1),$$

on eût

$$\psi(x)>\frac{4a}{\pi}E(x)-b\,\alpha(x).$$

Enfin pour $x < 1$, on aurait évidemment

$$\psi(x) = \frac{4a}{\pi} \mathrm{E}(x) - b\alpha(x),$$

lorsqu'on aurait

$$\psi(x) = \mathrm{E}(x) = \alpha(x) = 0.$$

L'inégalité

$$\psi(x) > \frac{4a}{\pi} \mathrm{E}(x) - b\alpha(x)$$

serait donc absolument générale.

On en déduirait

$$\sum \psi\left(\frac{x}{m+in}\right) > \frac{4a}{\pi} \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right) - b \sum \alpha\left(\frac{x}{m+in}\right)$$

ou bien

$$\mathrm{T}(x) > \frac{4a}{\pi} \sum \mathrm{E}\left(\frac{x}{m+in}\right) - b\mathrm{E}(x). \tag{2}$$

Mais le premier membre de cette inégalité a pour valeur asymptotique

$$\frac{\pi}{2} x^2 \log x,$$

le second membre a pour valeur asymptotique

$$\frac{a\pi}{2} x^2 \log x.$$

Si donc $a > 1$, cette seconde valeur asymptotique est plus grande que la première. Donc, pour x assez grand, l'inégalité (2) cesserait d'avoir lieu.

L'hypothèse faite est donc absurde, et nous devons conclure que l'inégalité (1) a lieu une infinité de fois.

On démontrerait de même qu'on a une infinité de fois

$$\psi(x) > \frac{4a}{\pi} \mathrm{E}(x)$$

si $a < 1$.

Si l'on se rappelle quelle est la valeur asymptotique de $E(x)$, on pourra énoncer le même résultat d'une autre manière.

On aura une infinité de fois

$$\psi(x) > a x^2$$

si $a < 1$, et une infinité de fois

$$\psi(x) < a x^2$$

si $a > 1$.

Dans le cas des nombres premiers réels, M. Tchebicheff avait trouvé qu'à partir d'une certaine valeur de x on a

$$\psi(x) < 1,11 . x.$$

On pourrait trouver une inégalité analogue par des procédés semblables à ceux qu'a employés le savant russe, mais il est plus simple de la déduire de la sienne.

Pour éviter toute confusion, je désignerai par $\theta_0(x)$ et $\psi_0(x)$ les fonctions de M. Tchebicheff relatives aux nombres réels; et je continuerai à représenter par $\theta(x)$ et $\psi(x)$ les fonctions relatives aux idéaux.

Alors $\theta_0(x^2)$ est la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x^2; et $\theta(x)$ est la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux premiers dont la norme ne surpasse pas celle de x, c'est-à-dire deux fois la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n+1$ qui ne surpassent pas x^2; plus la somme des logarithmes des carrés des nombres premiers de la forme $4n+3$ qui ne surpassent pas x (c'est-à-dire plus deux fois la somme des logarithmes de ces nombres premiers) plus le logarithme de 2.

Combien de fois le terme $\log p$ figurera-t-il donc dans $\theta_0(x^2)$ et dans $\theta(x)$?

Si $p = 2$, une fois dans θ_0, une fois dans θ.

Si $p = 4n+1$, $p \leqq x^2$, une fois dans θ_0, deux fois dans θ.

Si $p = 4n+3$, $p \leqq x$, une fois dans θ_0, deux fois dans θ.

Si $p = 4n+3$, $p > x$, $p \leqq x^2$, une fois dans θ_0, zéro fois dans θ.

Si $p > x^2$, zéro fois dans θ_0, zéro fois dans θ.

On peut déduire de là l'inégalité suivante

$$\theta(x) < 2\theta_0(x^2).$$

Si nous désignons par $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n+1$ et de la forme $4n+3$ qui ne surpassent pas x, on a donc

$$(3) \qquad \begin{cases} \theta\ (x) \ = 2\theta_1(x^2) + \theta_2(x) \ + \log 2. \\ \theta_0(x^2) = \ \ \theta_1(x^2) + \theta_2(x^2) + \log 2. \end{cases}$$

Comme on a

$$\psi\ (x) \ = \theta(x) \ + \theta\sqrt{x} \ + \theta\sqrt[3]{x} - \ldots,$$
$$\psi_0(x^2) = \theta_0(x^2) + \theta_0\sqrt{x^2} + \theta_0\sqrt[3]{x^2} + \ldots,$$

il viendra également

$$\psi(x) < 2\psi_0(x^2),$$

et l'on aura, à partir d'une certaine valeur de x,

$$\psi(x) < 2{,}22x^2.$$

D'autre part, nous retrouvons les inégalités

$$\psi(x) > \theta(x) > \psi(x) - 2\psi\sqrt{x},$$

d'où

$$\psi(x) > \theta(x) > \psi(x) - 4{,}44x.$$

On aura une infinité de fois, si $a > 1$,

$$\psi(x) < ax^2$$

et, par conséquent,

$$\theta(x) < ax^2.$$

On aura une infinité de fois, si $a < a' < 1$,

$$\psi(x) > a'x^2,$$

et, par conséquent, si x est assez grand,

$$\theta(x) > a'x^2 + 4,44x > ax^2.$$

Si donc le rapport $\frac{\theta(x)}{x^2}$ tend vers une limite, cette limite ne peut être que l'unité.

Si l'on observe que la différence

$$\theta(x) - 2\theta_1(x^2)$$

est égale à $\theta_2(x) + \log 2$, c'est-à-dire positive et plus petite que $\theta_0(x)$, ou, *a fortiori*, que $1,11\,x$ (si x est assez grand), on conclura qu'elle est négligeable devant x^2.

Donc on a une infinité de fois

$$\theta_1(x^2) < \frac{ax^2}{2} \qquad \text{si } a > 1,$$

et une infinité de fois

$$\theta_1(x^2) > \frac{ax^2}{2} \qquad \text{si } a < 1.$$

Donc *la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n+1$ qui ne surpassent pas x est une infinité de fois plus petite que $\frac{ax}{2}$ si $a > 1$, et une infinité de fois plus grande que $\frac{ax}{2}$ si $a < 1$.*

C'est ce qu'on peut exprimer d'une façon vague, mais concise, en disant que cette somme oscille autour de $\frac{x}{2}$.

9. Soit maintenant $\varphi_1(x)$ la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n+1$ qui ne surpassent pas x.

Nous aurons, en appelant p ces nombres premiers,

$$\varphi_1(x) = \sum 1, \qquad \theta_1(x) = \sum \log p.$$

et, puisque $\log p < \log x$,

$$\log x \sum 1 = \sum \log x > \sum \log p,$$
$$\varphi_1(x) \log x > \theta_1(x).$$

Or, on a une infinité de fois

$$\theta_1(x) > \frac{ax}{2} \qquad \text{si } a < 1.$$

On aura donc une infinité de fois

$$\varphi_1(x) > \frac{ax}{2 \log x}$$

D'autre part, $\theta_1(x)$ est la somme des logarithmes de $\varphi_1(x)$ nombres entiers tous différents entre eux, et sera, par conséquent, plus grand que la somme des logarithmes des $\varphi_1(x)$ plus petits nombres entiers, c'est-à-dire que

$$\mathrm{T}[\varphi_1(x)].$$

Je donne ici à $\mathrm{T}(x)$ la même signification que M. Tchebicheff, c'est-à-dire la même signification que dans les n^{os} **1** à **3**, et non plus la signification que je lui ai donnée dans les n^{os} **5** à **9**.

Je rappelle maintenant que, dans le n° **3**, j'ai déduit des inégalités

$$\varphi(x) \log x > \theta(x),$$
$$\mathrm{T}[\varphi(x)] < \theta(x),$$

et de la suivante

$$\theta(x) < ax,$$

qui doit avoir lieu une infinité de fois si $a > 1$; j'ai déduit, dis-je, que l'on doit avoir une infinité de fois

$$\varphi(x) < \frac{ax}{\log x}$$

si $a > 1$.

De même ici j'ai les deux inégalités

$$\varphi_1(x)\log x > \theta_1(x),$$
$$T[\varphi_1(x)] < \theta_1(x),$$

et je sais que l'on a une infinité de fois

$$\theta_1(x) < \frac{ax}{2}$$

si $a > 1$. Je puis donc répéter le même raisonnement sans y rien changer et en déduire le même résultat.

On aura une infinité de fois

$$\varphi_1(x) < \frac{ax}{2\log x}$$

si $a > 1$.

Ainsi *le nombre des nombres premiers de la forme $4n+1$ qui ne surpassent pas x est une infinité de fois plus petit que $\frac{ax}{2\log x}$ si $a > 1$ et une infinité de fois plus grand que $\frac{ax}{2\log x}$ si $a < 1$.*

C'est ce qu'on peut exprimer en disant que ce nombre oscille autour de $\frac{x}{2\log x}$ pendant que le nombre total des nombres premiers non supérieurs à x oscille autour de $\frac{x}{\log x}$, ou, d'une manière plus incorrecte encore, en disant qu'il y a autant de nombres premiers de la forme $4n+1$ qu'il y en a de la forme $4n+3$.

Il est clair qu'on pourrait, en raisonnant tout à fait de la même manière, trouver des résultats analogues en partant d'idéaux construits a à l'aide d'une équation fondamentale autre que $x^2+1=0$. Deux nombres s'introduiraient alors dans les calculs, à savoir le nombre des classes d'idéaux et un nombre dépendant des unités complexes; mais je crois qu'ils disparaîtraient à la fin du calcul.

Paris, le 3 décembre 1891.

Remarques sur les intégrales définies;

Par M. Camille JORDAN.

L'intégrale définie (simple ou multiple) d'une fonction f dans un champ E s'obtient, comme on sait (lorsque le champ et les valeurs de la fonction sont bornés), de la manière suivante :

On décompose le champ en éléments infiniment petits dans tous les sens; on multiplie l'étendue $d\sigma$ de chacun de ces éléments par la valeur de f en un point choisi à volonté dans l'élément; et l'on cherche la limite de la somme $\sum f\,d\sigma$ ainsi formée.

On sait en effet que cette limite a une valeur bien déterminée lorsque la fonction f est continue. Cette propriété subsiste même pour une classe de fonctions plus générale, définies d'une manière précise par un théorème bien connu de Riemann.

Enfin, M. Darboux a fait voir que, quelle que soit la fonction bornée f, les deux sommes $\sum \mathrm{M}\,d\sigma$, $\sum m\,d\sigma$, où M et m représentent le maximum et le minimum de f dans l'élément $d\sigma$, ont toujours une limite parfaitement déterminée.

Ces résultats sont très nets et éclaircissent complètement le rôle que joue la fonction dans l'intégrale.

L'influence de la nature du champ ne paraît pas avoir été étudiée avec le même soin. Toutes les démonstrations reposent sur ce double postulatum, que chaque champ E a une étendue déterminée; et que, si on le décompose en plusieurs parties E_1, E_2, ..., la somme des étendues de ces parties est égale à l'étendue totale de E. Or ces propo-

sitions sont loin d'être évidentes si on laisse à la conception du champ toute sa généralité.

Nous nous proposons de montrer dans les pages suivantes qu'à un champ E quelconque correspondent deux nombres déterminés E' et E'' qu'on peut appeler son *étendue intérieure* et son *étendue extérieure*.

Si ces deux nombres coïncident, nous dirons que E est mesurable et a pour étendue le nombre $E'' = E'$. Pour que cette circonstance se présente, il faut et il suffit que la frontière de E ait une étendue nulle.

Une fonction f, qui reste bornée dans tout l'intérieur de E, admet dans cette région une intégrale par excès et une intégrale par défaut.

Si ces deux intégrales coïncident, elles représentent l'intégrale proprement dite de la fonction f dans le champ E.

La détermination d'une intégrale proprement dite multiple se ramène à celle d'une suite d'intégrales simples, pourvu que le champ soit mesurable.

Si la valeur de la fonction $f(x, y)$ ne reste plus bornée lorsque le point (x, y) se rapproche indéfiniment de la frontière du champ d'intégration E, supposé encore borné, il sera nécessaire et suffisant, pour que l'intégrale (par excès ou par défaut) ait une valeur finie et déterminée, que la valeur de l'intégrale, prise dans un domaine mesurable et parfait D intérieur à E, tende vers zéro en même temps que l'aire de D, quelle que soit la situation de ce domaine dans le champ.

Si le champ E est infini, il faudra en outre que l'intégrale prise dans D tende vers zéro, lorsque D varie d'une manière quelconque, mais de telle sorte que sa plus courte distance à l'origine des coordonnées tende vers ∞.

Si les intégrales de $f(x, y)$ par excès et par défaut, dans le champ E sont toutes deux finies et déterminées, il en sera de même de l'intégrale par excès de la fonction mod f. Cette condition est suffisante.

Pour exposer, sans faire de restriction inutile, la théorie du changement de variables dans les intégrales multiples, il semble qu'on doive renoncer à s'appuyer, comme on le fait communément, sur la réduction à une suite d'intégrales simples, celle-ci n'étant établie que pour les intégrales proprement dites prises dans un champ mesurable. La méthode géométrique, employée pour les intégrales doubles ou triples, et dans laquelle on change simultanément toutes les variables, est pré-

férable à ce point de vue et s'étend aisément au cas de n variables. Elle exige toutefois quelques développements pour être rendue tout à fait rigoureuse. Cette étude nous conduit au résultat suivant :

Soient x, y et u, v deux couples de variables liées par les relations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v)$$

de telle sorte que, lorsque (u, v) décrit un certain domaine E, (x, y) décrira un domaine correspondant E'.

Supposons : 1° qu'à chaque point de E corresponde un seul point de E' et réciproquement; 2° qu'en tout point intérieur à E' (sauf en des points exceptionnels formant un ensemble d'étendue nulle) les fonctions φ, φ_1 admettent des dérivées continues, dont le jacobien J ne soit pas nul.

Cela posé, soit $f(x, y)$ une fonction quelconque, telle que l'intégrale

$$S_{E'} f(x, y)\, dx\, dy$$

(calculée par excès ou par défaut) soit finie et déterminée. Sa valeur sera égale à celle de l'intégrale

$$S_E f(\varphi, \varphi_1) \bmod J\, du\, dv$$

(calculée de la même manière).

I. — Notions générales sur les ensembles.

1. Soient $x, y, \ldots, n$ variables indépendantes. Tout système de valeurs a, b, ... attribué à ces variables constituera un point d'un espace à n dimensions.

L'*écart* pp' de deux points $p = (a, b, \ldots)$ et $p' = (a', b', \ldots)$ sera défini par la relation

$$pp' = |a' - a| + |b' - b| + \ldots.$$

Nous appellerons avec M. Cantor :

1° *Ensemble* toute collection de points;

2° *Point limite* d'un ensemble E tout point π tel, qu'on puisse, quel que soit ε, déterminer dans E un point p différent de π, et dont l'écart à π soit $< \varepsilon$;

3° *Dérivé* de E l'ensemble E' formé par les points limites de E;

4° *Ensemble parfait* tout ensemble qui contient son dérivé.

Un ensemble E', *dérivé d'un autre ensemble* E, *est nécessairement parfait.* — Soit en effet π un de ses points limites; E' contiendra un point p' tel que $p'\pi$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$; mais, p' étant un point limite de E, on pourra déterminer dans E un point p tel que pp' soit $< \frac{\varepsilon}{2}$; on aura donc

$$p\pi \leqq pp' + p'\pi < \varepsilon;$$

donc π est un point limite de E, et appartient à E'.

2. Si l'ensemble E ne contient pas tous les points possibles, les points qui ne lui appartiennent pas forment un ensemble *complémentaire* E_1.

Soient respectivement E', E'_1 les ensembles dérivés de E, E_1. Les points du plan pourront être répartis en trois classes :

1° Les points *intérieurs* à E. Ce sont ceux qui appartiennent à E sans appartenir à E'_1. Pour chacun d'eux p on pourra assigner une quantité ε telle que tout point dont l'écart à p est $< \varepsilon$ appartient à E et non à E_1.

2° Les points *extérieurs*, qui appartiennent à E_1 sans appartenir à E'.

3° Les *points frontières*, qui appartiennent à la fois à l'un des ensembles E, E_1 et au dérivé de l'autre.

On peut aisément concevoir des ensembles pour lesquels les points intérieurs ou les points extérieurs, ou tous les deux à la fois, viennent à manquer. Mais *il existe toujours des points frontières.*

Soient en effet $p = (a, b)$ et $\pi = (\alpha, \beta)$ deux points quelconques choisis respectivement dans E et dans E_1.

Partageons la droite $p\pi$ en 2^n segments égaux. Soit p_n le dernier des points de division qui appartienne à E, π_n le suivant. Il est clair que, si l'on fait croître n, les deux points p_n et π_n se rapprocheront

constamment l'un de l'autre, et tendront vers un même point limite q. Si n est assez grand, on aura

$$p_n q < \varepsilon, \qquad \pi_n q < \varepsilon.$$

Le point q appartiendra donc à la fois à E′ et à E'_1 et comme il appartient en outre à E ou à E_1, ce sera un point frontière.

Il pourrait arriver qu'à partir d'une certaine valeur ν de n, l'un des points p_n, π_n, le premier par exemple, cessât de se déplacer, mais la conséquence serait la même. En effet, le point $q = p_\nu$ appartiendrait à E; d'ailleurs c'est la limite des points π_n, qui appartiennent à E_1; donc il appartient à E'_1; c'est donc encore un point frontière.

L'ensemble F *des points frontières est parfait.* — Soit, en effet, q un point limite de F; F contiendra une infinité de points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ convergeant vers q. Si parmi eux il en est une infinité qui soient communs à E et à E'_1, leur point limite q appartiendra aux dérivés de ces ensembles; or E a pour dérivé E′ et E'_1 contient son dérivé. Donc q est commun à E′ et à E'_1; mais il appartient en outre à E ou à E_1 : c'est donc un point frontière.

Si parmi les points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ il n'en existe qu'un nombre borné communs à E et à E'_1, les autres, en nombre infini, seront communs à E_1 et à E′, et un raisonnement analogue au précédent conduira à la même conséquence.

5. Un ensemble de points (x, y) sera dit *borné* si les coordonnées de tous ces points restent comprises entre des nombres fixes M et m.

Théorème de Weierstrass. — *Tout ensemble borné qui contient une infinité de points admet au moins un point limite.*

En effet, partageons l'intervalle de m à M en n parties égales. Les deux coordonnées x, y d'un point quelconque de E tomberont chacune dans l'un de ces intervalles. Groupons en un ensemble partiel tous ceux des points de E où x d'une part et y d'autre part tombent dans le même intervalle.

Nous obtiendrons ainsi n^2 ensembles partiels, dont la réunion con-

stitue E. L'un au moins E_1 de ces nouveaux ensembles contiendra une infinité de points; et l'écart

$$|x'-x|+|y'-y|$$

de deux de ces points ne pourra surpasser $2\frac{M-m}{n}\cdot$

Opérons sur E_1 comme sur E; nous le décomposerons en n^2 ensembles partiels, dont l'un au moins E_2 contiendra une infinité de points, dont les écarts mutuels ne pourront surpasser $2\frac{M-m}{n^2}\cdot$ On pourra encore opérer sur E_2 comme sur E_1, et ainsi de suite.

Cela posé, soient p_1 un point choisi à volonté dans E_1; p_2 un autre point, choisi à volonté dans E_2, etc. Ces points $p_1, p_2, \ldots$ tendront évidemment vers un point limite π.

4. Soient E, E' deux ensembles n'ayant aucun point commun. Les écarts des divers points p de E aux divers points de p' de E' forment un ensemble de nombres non négatifs. D'après un théorème bien connu, il existe donc un *minimum* Δ, positif ou nul, tel : 1° qu'aucun des écarts pp' ne soit $<\Delta$; 2° qu'il en existe un moindre que $\Delta+\varepsilon$, quelle que soit la quantité positive ε.

Ce minimum Δ s'appellera l'*écart* des ensembles E, E'. S'il est >0, nous dirons que ces ensembles sont *séparés*.

Deux ensembles bornés et parfaits E, E', *qui n'ont aucun point commun, sont nécessairement séparés; et, si leur écart est* Δ, *ils contiendront au moins un couple de points dont l'écart mutuel soit précisément* Δ.

Soient en effet $p=(x,y), \ldots$ les points de E; $p'=(x', y'), \ldots$ ceux de E'. Associons-les deux à deux de toutes les manières possibles de manière à former de nouveaux points $(pp')=(x, y, x', y')$ dans l'espace à quatre dimensions. L'ensemble EE' de tous ces nouveaux points sera évidemment borné et parfait.

Cela posé, si E et E' ne contenaient aucun couple de points dont l'écart fût Δ, ils contiendraient tout au moins un couple de points p_1, p'_1 dont l'écart serait moindre que $\Delta+\varepsilon_1$, ε_1 étant pris à volonté.

Soient d_1 l'écart de p_1 à p'_1, ε_2 un nombre $< d_1$ et $< \frac{\varepsilon_1}{2}$; on pourra déterminer un nouveau couple de points p_2, p'_2 dont l'écart d_2 soit $< \Delta + \varepsilon_2$. Continuant ainsi nous obtiendrons une suite infinie de couples p_1, p'_1 ; p_2, p'_2 ; ... où les écarts convergent vers Δ ; les points composés $(p_1 p'_1)$, $(p_2 p'_2)$, ... de l'ensemble EE′ admettent au moins un point limite (pp'), où les deux points composants auront pour écart Δ. Or p est une limite de l'ensemble des points $p_1, p_2, \ldots$ qui appartiennent à E; c'est donc un point limite de E, et comme cet ensemble est parfait, il contient p. On voit de même que E′ contient p'.

D'ailleurs Δ ne peut être nul ; car alors, les points p, p' se confondant, E et E′ auraient un point commun, contre l'hypothèse.

5. Nous dirons qu'un ensemble E borné et parfait est d'*un seul tenant* s'il ne peut être décomposé en plusieurs ensembles parfaits séparés.

Le caractère distinctif d'un pareil ensemble est le suivant :

Entre deux quelconques de ses points p, p', on peut toujours, quel que soit ε, intercaler une chaîne de points intermédiaires, appartenant à l'ensemble donné, et telle que l'écart de deux points consécutifs soit $< \varepsilon$.

1° Cette condition est nécessaire. En effet, supposons que pour un nombre donné ε elle ne soit pas satisfaite. Associons au point p d'abord tous ceux de E dont l'écart à p est $< \varepsilon$, puis ceux dont l'écart à l'un de ceux-ci est $< \varepsilon$ et ainsi de suite. Les points ainsi obtenus forment un ensemble E_1. Les autres points de E forment un ensemble E_2, contenant au moins un point, à savoir p', et dont l'écart à E_1 est $\overline{\gtrless} \varepsilon$. D'ailleurs chacun des ensembles E_1, E_2 est parfait. Soit en effet l_1 un point limite de E_1. Il appartient à E, qui est supposé parfait. Donc il appartient à E_1 ou à E_2. D'ailleurs il existe des points de E_1 dont il est écarté de moins de ε. Donc il appartient à E_1 et non à E_2.

Soit d'autre part l_2 un point limite de E_2. Il appartient à E, et comme il existe des points de E_2 dont il est écarté de moins de ε, il ne peut appartenir à E_1 ; donc il appartient à E_2.

2° Réciproquement, cette condition est suffisante. En effet, supposons E décomposable en deux ensembles parfaits séparés E_1 et E_2; soient δ leur écart, p_1 et p_2 deux points pris respectivement dans E_1 et E_2. Si on les relie par une chaîne quelconque de points intermédiaires, cette chaîne contiendra nécessairement deux points consécutifs appartenant, l'un à E_1, l'autre à E_2. Leur écart sera donc $\overline{\gtrless} \delta$; et la condition de l'énoncé ne sera pas remplie pour les valeurs de ε moindres que δ.

La proposition ci-dessus entraîne cette conséquence :

Un ensemble E *formé par la réunion de plusieurs ensembles d'un seul tenant* $E_1, E_2, \ldots$, *dont chacun a au moins un point commun avec l'un des précédents, est lui-même d'un seul tenant.*

6. *Un ensemble* E *d'un seul tenant se confond avec son dérivé* E' (s'il ne se compose pas d'un seul point).

En effet, E contient E', par définition. Mais, d'autre part, il y est contenu. Soient, en effet, p, p' deux points arbitrairement choisis dans E. On peut intercaler entre eux une chaîne de points $p_1, p_2, \ldots$, tels que l'écart de deux points consécutifs quelconques, et notamment celui de p à p_1, soit $< \varepsilon$. On peut donc, quel que soit ε, déterminer dans E un point p_1 dont l'écart à p soit $< \varepsilon$. Donc p est un point limite de E et appartient à E'.

7. Soit E un ensemble borné, formé des points $p, p_1, \ldots$; les écarts de ces points pris deux à deux forment un ensemble de nombres positifs qui est borné. Il admet donc un maximum d, que nous appellerons le *diamètre* de l'ensemble E.

8. Cherchons, d'autre part, à préciser la notion de l'*étendue* de cet ensemble.

Cette étendue sera une longueur, une aire, un volume, etc., suivant que le nombre des dimensions de l'ensemble sera 1, 2, 3, ... Nous supposerons, pour fixer les idées, que ce nombre soit égal à 2. Chaque point (u, v) de E pourra être représenté géométriquement sur un plan par le point dont u, v sont les coordonnées rectangles.

Décomposons ce plan par des parallèles aux axes en carrés de côté r. L'ensemble de ceux de ces carrés dont tous les points sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E; l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à E ou qui contiennent un point de sa frontière forment un nouveau domaine $S + S'$, auquel E est intérieur. Ces domaines, étant formés par la réunion de carrés, ont des aires déterminées, qu'on peut également représenter par S et $S + S'$.

Faisons varier la décomposition en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro : *les aires* S *et* $S + S'$ *tendront vers des limites fixes.*

1° En effet, considérons, par exemple, celles des aires S pour lesquelles r ne surpasse pas un nombre fixe; elles forment un système de nombres positifs, évidemment borné, et admettant un maximum A. On pourra trouver une décomposition déterminée, pour laquelle cette aire prenne une valeur S_1 plus grande que $A - \varepsilon$. La frontière F de E et celle du domaine intérieur S_1 forment deux ensembles parfaits, ayant un écart δ différent de zéro.

Considérons maintenant une nouvelle décomposition quelconque en carrés de côté moindre que $\frac{\delta}{2}\cdot$ L'écart maximum entre deux points d'un même carré y sera $< \delta$. Donc tous ceux de ces carrés dont un point appartient à S_1 seront en entier dans l'intérieur de E. Donc le domaine S contiendra S_1, et son aire sera $\overline{\gtrless} A - \varepsilon$; mais, d'autre part, elle ne surpasse pas A. Les aires S admettent donc une limite égale à A.

2° Considérons, d'autre part, les aires $S + S'$. Elles forment un ensemble de nombres positifs admettant un minimum a. Il existera une décomposition déterminée pour laquelle $S + S'$ prendra une valeur $S_1 + S'_1$ moindre que $a + \varepsilon$. Soit δ l'écart de la frontière de E à celle du domaine $S_1 + S'_1$. Considérons une autre décomposition quelconque où r soit $< \frac{\delta}{2}\cdot$ Tous les carrés dont un point appartient à E ou à sa frontière seront intérieurs à $S_1 + S'_1$. On aura donc

$$S + S' \overline{\gtrless} S_1 + S'_1 < a + \varepsilon.$$

Mais, d'autre part, $S + S' \overline{\gtrless} a$. Donc a est la limite des sommes $S + S'$.

Comme on a toujours

$$S + S' \geqq S,$$

a sera au moins égal à A.

Nous appellerons A l'*aire intérieure* de E, a son *aire extérieure*. Si S' a pour limite zéro, nous dirons que E est *quarrable*, et a pour *aire* la quantité $a = A$.

9. Soit E' un nouvel ensemble intérieur à E. Son aire extérieure, et, *a fortiori*, son aire intérieure, seront moindres que l'aire intérieure de E. Soit, en effet, δ l'écart des frontières de E et de E'. Si l'on décompose le plan en carrés de côtés $< \frac{\delta}{2}$, il est clair que tous les carrés non extérieurs à E', et aussi les carrés adjacents, seront intérieurs à E. L'aire intérieure de E surpasse donc l'aire extérieure de E' d'une quantité au moins égale à la somme des aires de ces derniers carrés.

10. Supposons E formé par la réunion de plusieurs ensembles partiels $E_1, E_2, \ldots$, et considérons une décomposition quelconque du plan en carrés. Soient respectivement $S, S_1, S_2, \ldots$ les sommes des carrés intérieurs à $E, E_1, E_2, \ldots$: $S', S'_1, S'_2, \ldots$ celles des carrés qui rencontrent leurs frontières. Tout carré intérieur à l'un des ensembles E_1, $E_2, \ldots$ l'est à E, et, d'autre part, tout carré non extérieur à E est non extérieur à l'un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots$; on aura donc

$$S \geqq S_1 + S_2 + \ldots, \qquad S + S' \leqq S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + \ldots,$$

et à la limite

$$A \geqq A_1 + A_2 + \ldots, \qquad a \leqq a_1 + a_2 + \ldots.$$

$A, A_1, A_2, \ldots$ et $a, a_1, a_2, \ldots$ représentant les aires intérieures et extérieures des ensembles $E, E_1, E_2, \ldots$. Ces inégalités se changent, d'ailleurs, en égalités, si les ensembles sont quarrables.

11. On peut concevoir une infinité de décompositions du plan en régions élémentaires quarrables $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$, dont le diamètre ne surpasse pas un nombre donné ρ. Considérons une suite quelconque de décompositions de ce genre, où ρ tende vers zéro. La somme $\Sigma\Delta\sigma$,

étendue aux éléments intérieurs à E, aura pour limite l'aire intérieure A.

Nous pouvons, en effet, déterminer une décomposition en carrés, telle que la somme S des aires des carrés intérieurs soit $> A - \varepsilon$; soit δ l'écart des frontières de E et de S. Dès que ρ sera devenu $< \delta$, tout élément $\Delta\sigma$ qui a un de ses points dans S sera tout entier intérieur à E. L'aire $\Sigma\Delta\sigma$ contiendra donc l'aire S et sera $> A - \varepsilon$. Mais, d'autre part, elle ne peut surpasser A. En effet, soit δ' l'écart de sa frontière à celle de E. Considérons une autre décomposition en carrés, de côté $< \frac{\delta'}{2}$. Tous ceux de ces carrés qui ont un point commun avec l'aire $\Sigma\Delta\sigma$ seront intérieurs à E. La somme S' des carrés intérieurs est donc $\geqq \Sigma\Delta\sigma$; mais elle ne surpasse pas A.

Donc A est bien la limite des sommes $\Sigma\Delta\sigma$.

On voit de même que la somme $\Sigma\Delta\sigma$, étendue non seulement aux éléments intérieurs à E, mais aussi à ceux qui rencontrent sa frontière, a pour limite l'aire extérieure a.

La somme $\Sigma\Delta\sigma$, bornée aux éléments frontières, sera donc nulle si E est quarrable.

12. Les considérations précédentes sont évidemment applicables aux ensembles d'un nombre quelconque de dimensions. On pourra déterminer pour chacun d'eux une *étendue intérieure* et une *étendue extérieure*. Si elles coïncident, l'ensemble sera *mesurable*.

13. Nous terminerons ces remarques en établissant le théorème suivant :

Soient $u, v, \ldots$ *des fonctions des variables indépendantes* $x, y, \ldots$ *qui restent continues lorsque* $x, y, \ldots$ *se meuvent dans un certain ensemble* E; *soit* F *l'ensemble des points* $(u, v, \ldots)$ *correspondant aux divers points* $(x, y, \ldots)$ *de* E.

1° *Si* E *est borné et parfait,* F *le sera également;*

2° *Si* E *est d'un seul tenant,* F *le sera également.*

Supposons, en effet, que E soit borné et parfait. Si F n'était pas

borné, on pourrait y déterminer un point q_0 où la somme

$$|u| + |v| + \ldots$$

fût plus grande qu'un nombre donné quelconque L; puis un autre point q_1, où cette somme de modules fût $> 2L$; un autre point q_2, où elle fût $> 4L, \ldots$; un nouveau point q_n, où elle fût $> 2^n L, \ldots$. Soient $p, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ les points correspondants de E. Ils sont tous différents, car $u, v, \ldots$ n'ont qu'un seul système de valeurs en chaque point de E. Leur nombre étant infini, ils admettent au moins un point limite π, qui appartiendra à E. La suite $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ contiendra : 1° un point p_{α_0} tel que l'écart $p_{\alpha_0}\pi$ soit moindre qu'un nombre fixe quelconque ε; un point p_{α_1} tel que l'écart $p_{\alpha_1}\pi$ soit moindre que $p_0\pi$, $p_1\pi, \ldots, p_{\alpha_0}\pi$ et moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$; un point p_{α_2} tel que $p_{\alpha_2}\pi$ soit moindre que $p_0\pi, \ldots, p_{\alpha_1}\pi$ et que $\frac{\varepsilon}{4}, \ldots$. Les points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ convergent vers π; d'ailleurs, les indices $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ vont en croissant; donc $\alpha_n \geqq n$ et la somme

$$|u| + |v| + \ldots,$$

au point q_{α_n}, sera au moins égale à $2^n L$. Il existera donc dans E des points aussi rapprochés qu'on voudra du point π, et pour lesquels $|u| + |v| + \ldots$ sera plus grand que tout nombre assignable. Ce résultat est absurde; soient, en effet, U, V, ... les valeurs de $u, v, \ldots$ au point π. On pourra, en vertu de la continuité admise pour ces fonctions, trouver un nombre η tel que, pour tout point de E dont l'écart à π est $< \eta$, $u, v, \ldots$, diffèrent de U, V, ..., de moins de ε; d'où l'on déduit

$$|u| + |v| + \ldots < |U| + \varepsilon + |V| + \varepsilon + \ldots.$$

Il reste à prouver que F est parfait, c'est-à-dire contient son dérivé F'. Soit q' un point de F', vers lequel converge une suite infinie $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ de points de F. Soient $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ les points correspondants de E. Ils admettent au moins un point limite π, appartenant à E. Dans la suite $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, on peut trouver, comme on l'a vu, une suite de points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ qui convergent vers π, et où les indices $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ aillent en croissant. Les points $q_{\alpha_0}, \ldots, q_{\alpha_n}, \ldots$ convergeront vers le point q'. Mais, en vertu de la continuité,

ils doivent converger vers le point de F qui correspond à π. Donc q' appartient bien à F et correspondra au point π.

Supposons enfin que E soit d'un seul tenant, et montrons qu'il en est de même de F.

Soient $q = (u, v, \ldots)$ et $Q = (U, V, \ldots)$ deux points quelconques de F; $p = (x, y, \ldots)$ et $P = (X, Y, \ldots)$ les points correspondants de E. On peut les relier par une chaîne de points intermédiaires p_1, p_2, ... tels que l'écart

$$|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| + \ldots$$

de deux points consécutifs

$$p_k = (x_k, y_k, \ldots), \qquad p_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots),$$

et *a fortiori* chacun des modules

$$|x_{k+1} - x_k|, \qquad |y_{k+1} - y_k|, \qquad \ldots$$

soit inférieur à un nombre donné quelconque η.

Soient u_k, v_k, ... les valeurs des fonctions u, v, ... aux points x_k, y_k, ... La continuité étant uniforme, comme l'a montré M. Lüroth, dans tout domaine borné et parfait tel que E, on peut choisir η assez petit pour que, pour toute valeur de k, les modules

$$|u_{k+1} - u_k|, \qquad |v_{k+1} - v_k|, \qquad \ldots,$$

et par suite leur somme, soient moindres qu'une quantité ε arbitrairement choisie. Or cette somme représente l'écart des deux points

$$q_k = (u_k, v_k, \ldots) \qquad \text{et} \qquad q_{k+1} = (u_{k+1}, v_{k+1}, \ldots).$$

Les points q, q_1, ..., Q forment ainsi une chaîne où l'écart de deux points consécutifs est $< \varepsilon$. Notre proposition est donc établie.

II. — Intégrales définies.

14. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction qui conserve une valeur bornée dans l'intérieur d'un domaine E, supposé mesurable.

Décomposons E en domaines élémentaires mesurables e_1, e_2, ...

Désignons par M, m le maximum et le minimum de la fonction f dans E; par M_k, m_k son maximum et son minimum dans e_k, et formons les sommes

$$S = \sum M_k e_k, \qquad s = \sum m_k e_k.$$

Comme on a évidemment

$$m \leqq m_k \leqq M_k \leqq M,$$

S et s seront comprises entre

$$M \sum e_k = ME \qquad \text{et} \qquad m \sum e_k = mE,$$

et leurs modules seront, au plus, égaux à LE, L désignant le plus grand des deux modules $|M|$ et $|m|$ (ou le maximum de $|f|$ dans le domaine E).

M. Darboux a montré que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que les diamètres des éléments tendent vers zéro, S et s tendront vers des limites fixes.

En effet, considérons, par exemple, les sommes S. Leurs valeurs forment un ensemble borné, lequel admet un minimum T; et l'on pourra déterminer une décomposition particulière Δ_1 telle que la somme correspondante S_1 soit comprise entre T et $T + \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $e_1, \ldots, e_n$ les éléments de cette décomposition, n leur nombre; on aura

$$E = \sum_1^n e_k, \qquad S_1 = \sum M_k e_k.$$

Soit Δ une autre décomposition quelconque; nous y distinguerons deux sortes d'éléments : 1° ceux qui sont contenus en entier dans l'un des éléments $e_1, e_n, \ldots$, tel que e_k; nous les désignerons par $e_{k1}, \ldots, e_{ki}, \ldots$; 2° ceux qui empiètent sur plusieurs des éléments $e_1, e_2, \ldots$; désignons-les par $e'_1, \ldots, e'_l, \ldots$. Soient enfin M_{ki}, M'_l les maxima de f

dans e_{ki}, e'_l; on aura évidemment

$$M_k \geqq m, \qquad M_{ki} \leqq M_k, \qquad M'_l \leqq M,$$

$$E = \sum_{k,i} e_{ki} + \sum_l e'_l = \sum_k e_k,$$

et enfin, pour la somme S correspondante à la décomposition Δ,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,k} M_{ki} e_{ki} + \sum_l M'_l e'_l, \\ &\leqq \sum_k M_k \sum_i e_{ki} + M \sum_l e'_l, \\ &\leqq S_1 - \sum_k M_k \Big(e_k - \sum_i e_{ki} \Big) + M \sum_l e'_l, \\ &\leqq T + \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \sum_k \Big(e_k - \sum_i e_{ki} \Big). \end{aligned}$$

D'autre part, T étant le minimum des sommes S, on aura

$$S \geqq T.$$

De ces deux inégalités résulte immédiatement la preuve que, si le diamètre des éléments tend vers zéro, S tend vers T. En effet, les domaines $e_1, \ldots, e_n$ étant mesurables, la différence entre e_k et la somme $\sum e_{ki}$ des nouveaux éléments qui lui sont intérieurs tend vers zéro avec le diamètre de ces éléments. On pourra donc, après avoir choisi ε à volonté, ce qui fixera le nombre n, assigner un nombre δ tel que, si tous les éléments ont un diamètre $< \delta$, chacune des n sommes

$$e_k - \sum_i e_{ki}$$

devienne moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2n(M-m)}.$$

Dès lors, S sera compris entre T et $T + \varepsilon$.

Ce nombre fixe $T = \lim S$ se nomme l'*intégrale par excès* de la fonction $f(x, y, \ldots)$ dans l'intérieur de E.

On démontre de même que les sommes s tendent vers leur maximum t, qui sera l'*intégrale par défaut* de $f(x, y, \ldots)$.

On a évidemment $T \geqq t$. Si $T = t$, la fonction sera *intégrable*, et $T = t$ sera son intégrale, laquelle pourra être représentée par la notation $S_E f(x, y, \ldots) de$.

15. Si l'on partage E en plusieurs domaines mesurables $E_1, E_2, \ldots$, l'intégrale, soit par excès, soit par défaut, prise dans E, sera évidemment la somme des intégrales prises dans ces domaines partiels.

Nous avons vu, d'ailleurs, qu'on peut déterminer une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ dont chacun soit intérieur au suivant et à E, et dont les étendues aient pour limite l'étendue de E. L'intégrale (par excès ou par défaut) prise dans E sera la limite vers laquelle tend, pour $n = \infty$, l'intégrale prise dans E_n; car la différence des deux intégrales est égale à l'intégrale prise dans le domaine $E - E_n$, et son module, ne pouvant surpasser $L(E - E_n)$, tend vers zéro quand n tend vers ∞.

16. Nous avons admis, jusqu'à présent, que le domaine E est mesurable. Nous pouvons maintenant supprimer cette restriction. On peut, en effet, le considérer comme limite d'une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ dont les étendues convergent vers une limite qui, par définition, est l'étendue intérieure de E. L'intégrale (par excès ou par défaut) prise dans E_n tend vers une limite; car la différence entre les intégrales prises dans E_n et E_{n+p} a son module au plus égal à

$$L(E_{n+p} - E_n) < L(E - E_n),$$

et tend vers zéro pour $n = \infty$. Nous considérerons cette limite de l'intégrale prise dans E_n comme représentant la valeur de l'intégrale dans E.

17. *Si une fonction $f(x, y, \ldots)$ de n variables est intégrable dans un domaine* E, *d'étendue mesurable, le calcul de l'intégrale multiple*

$$I = S_E f(x, y, \ldots) de$$

se ramènera à celui de n intégrales simples successives.

Pour plus de simplicité, nous supposerons $n = 2$ dans la démonstration. Le champ E sera représenté géométriquement par un ensemble de points (x, y) situés dans un plan.

Les valeurs de y, auxquelles correspondent des points de E, forment un ensemble borné F. Soit η l'une d'elles; les valeurs de x qui, associées à η, donnent des points de E, forment un ensemble borné G_η. Nous ne pouvons pas affirmer que G_η ait une longueur mesurable, ni que la fonction $f(x, \eta)$ y soit intégrable; mais cette fonction étant bornée, on pourra toujours déterminer dans l'intérieur de G_η son intégrale par excès et son intégrale par défaut. Ce seront des fonctions de η, que nous pourrons désigner par $J(\eta)$ et $j(\eta)$, et qui sont bornées dans le domaine F. Nous pourrons donc déterminer dans l'intérieur de F : 1° l'intégrale par excès de $J(\eta)$, que nous désignerons par K; 2° l'intégrale par défaut de $j(\eta)$, que nous désignerons par k. Comme on a évidemment $J(\eta) \overline{\gtrless} j(\eta)$, k sera au plus égal à l'intégrale par défaut de $J(\eta)$ et *a fortiori* au plus égal à K.

Nous allons montrer, d'autre part, que K est au plus égal à l'intégrale double I. Pour cela, décomposons le plan en rectangles infiniment petits par des parallèles aux axes. Celui de ces rectangles qui est limité par les droites $x = x_i$, $x = x_i + dx_i$, $y = y_k$, $y = y_k + dy_k$ a pour aire $dx_i\,dy_k$; nous le désignerons par e_{ik}, s'il est tout entier intérieur à E, par e'_{ik} s'il contient un point de la frontière de E. Dans chacun des rectangles e_{ik}, la fonction $f(x, y)$ admettra un certain maximum M_{ik}, et dans la portion des rectangles e'_{ik} qui appartient à E elle ne pourra surpasser un nombre fixe M, égal au maximum de $f(x, y)$ dans le domaine E.

L'ensemble G_η est formé par les points communs à E et à la droite $y = \eta$. Les parallèles aux x que nous avons tracées décomposent cette droite en segments et l'intégrale $J(\eta)$ est égale à la somme des intégrales partielles prises dans l'intérieur des portions communes à ces divers segments et à E.

Supposons η compris entre y_k et $y_k + dy_k$, k ayant une valeur déterminée. Soit e_{ik} l'un des rectangles intérieurs à E compris entre les droites $y = y_k$ et $y = y_k + dy_k$. Le segment de la droite $y = \eta$ contenu dans ce rectangle a pour longueur dx_i et se trouve en entier

dans E; d'ailleurs, la fonction $f(x, y)$ en chaque point de ce segment a une valeur au plus égale à M_{ik}. La valeur de l'intégrale correspondante ne peut donc surpasser $M_{ik}\, dx_i$.

Soit, d'autre part, e'_{ik} un des rectangles compris entre $y = y_k$ et $y = y_k + dy_k$ qui rencontrent la frontière de E. La longueur (intérieure) de la portion de la droite $y = \eta$ commune à ce segment et à E ne peut surpasser dx_i; la valeur de la fonction $f(x, y)$ en chacun de ses points ne peut surpasser M; la valeur de l'intégrale correspondante ne peut surpasser $M\, dx_i$.

Donc la valeur de $J(\eta)$ ne pourra surpasser la quantité

$$\mu_k = \sum_i M_{ik}\, dx_i + M \sum_i dx_i,$$

la première somme s'étendant à ceux des rectangles e_{ik}, et la seconde à ceux des rectangles e'_{ik}, où k a la valeur constante que nous avons supposée.

Si donc nous désignons par I_k la valeur de l'intégrale par excès de $J(\eta)$ dans l'intervalle de $\eta = y_k$ à $\eta = y_k + dy_k$, on aura

$$I_k \overline{<} \mu_k\, dy_k \overline{<} \sum_i M_{ik} e_{ik} + M \sum_i e'_{ik}.$$

Chacun des éléments dy_k intérieurs à F donne une relation de ce genre. Sommant les inégalités obtenues, il viendra

$$\sum I_k \overline{<} \sum_{i,k} M_{ik} e_{ik} + M \sum_{i,k} e'_{ik}.$$

On remarquera que dans la première somme du second membre figurent tous les rectangles e_{ik} intérieurs à E, car toute parallèle aux x qui coupe un de ces rectangles ou passe à une distance de son contour inférieure à l'écart de ce contour à la frontière de E a nécessairement des points communs avec ce domaine. Au contraire, quelques-uns des rectangles frontières e'_{ik} pourront manquer dans la seconde somme.

Passons maintenant à la limite, en supposant que les dimensions

des rectangles décroissent indéfiniment. Le premier membre aura évidemment pour limite l'intégrale K. La première somme du second membre aura pour limite l'intégrale double $S_E f(x, y)\, de$, prise par excès. La seconde a pour limite zéro, si E est mesurable, comme nous l'avons supposé; car la somme totale des aires des rectangles frontières tend vers zéro, et, à plus forte raison, la somme $\sum_{i,k} e'_{ik}$, si celle-ci ne s'étend qu'à une partie de ces rectangles.

Nous voyons ainsi que l'intégrale K est au plus égale à l'intégrale double $S_E f(x, y)\, de$, prise par excès.

On démontrerait, par un raisonnement tout semblable, que l'intégrale k est au moins égale à cette même intégrale double prise par défaut.

Jusqu'à présent nous n'avons fait aucun usage de l'hypothèse que la fonction $f(x, y)$ est intégrable. S'il en est ainsi, les deux intégrales doubles, par excès et par défaut, coïncident entre elles, et, par suite, avec les intégrales K et k. Or chacune de celles-ci peut se calculer par deux intégrations simples, effectuées successivement [1].

18. Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans tout l'intérieur d'un domaine E et qui reste bornée dans tout domaine D mesurable et parfait contenu dans cet intérieur, sans toutefois jouir de cette propriété dans tout l'intérieur de E. Cette fonction admettra dans D une intégrale par excès et une intégrale par défaut, que nous représenterons respectivement par $S_D^1 f\, de$ et $S_D^2 f\, de$, ou, plus simplement, par S_D^1, S_D^2.

Considérons, par exemple, l'intégrale par excès S_D^1. Si nous faisons varier le domaine D d'une manière quelconque, mais de telle sorte

---

[1] La démonstration ci-dessus suppose que le domaine E est mesurable. S'il ne l'était pas, la proposition à établir pourrait se trouver en défaut. Supposons, par exemple, que E soit constitué par les points où $y \overline{\overline{>}}\, 0 \overline{\overline{<}}\, 1$ et $x \overline{\overline{>}}\, 0 \overline{\overline{<}}\, 1$, si y est rationnel ou $x \overline{\overline{<}}\, 0 \overline{\overline{>}} -1$, si y est irrationnel, et prenons pour fonction à intégrer une constante c. L'intégrale double $S_E c\, dx\, dy$ sera nulle, car l'aire intérieure de E est évidemment nulle. Mais, d'autre part, les domaines G_η et F ayant une longueur égale à 1, on aura

$$\int_F d\eta \int_{G_\eta} c\, dx = \int_F c\, d\eta = c.$$

que son aire ait pour limite l'aire intérieure de E, il pourra arriver que l'intégrale S_D^1 tende vers une limite déterminée. Nous dirons dans ce cas que cette limite est l'intégrale par excès de f dans le domaine E, et nous la représenterons par S_E^1.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette limite existe est que l'intégrale S_D^1 tende vers zéro lorsque D varie d'une manière quelconque de telle sorte que son aire tende vers zéro : autrement dit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un autre nombre δ tel, que pour tout domaine D (borné, parfait et intérieur à E) d'aire moindre que δ, on ait

$$|S_D^1| < \varepsilon.$$

En effet, supposons cette dernière condition satisfaite et considérons deux domaines quelconques D et D' (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que leurs aires D et D' diffèrent de l'aire intérieure de E d'une quantité moindre que δ. Soit d l'ensemble des points de D qui n'appartiennent pas à D'; d' celui des points de D' qui n'appartiennent pas à D; on aura évidemment

$$d < E - D' < \delta, \qquad d' < E - D < \delta,$$

$$D - D' = d - d'$$

et, par suite,

$$S_D^1 - S_{D'}^1 = S_d^1 - S_{d'}^1,$$

$$|S_D^1 - S_{D'}^1| \leqq |S_d^1| + |S_{d'}^1| < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve l'existence de la limite S_E^1.

Réciproquement, supposons la condition non satisfaite. Il existera une quantité ε pour laquelle on pourra déterminer un domaine d, d'aire inférieure à une quantité quelconque δ et tel que l'intégrale S_d^1 ait son module $\geqq \varepsilon$.

Soit D un domaine mesurable et parfait contenant d, intérieur à E et tel que E — D soit moindre que δ. Si nous enlevons du domaine D les points intérieurs à d, nous obtiendrons un nouveau domaine $D' = D - d$ dont l'aire D' sera $> E - 2\delta$. Les deux aires D et D' tendront toutes deux vers E si l'on fait décroître δ; mais la différence des intégrales correspondantes

$$S_D^1 - S_{D'}^1 = S_d^1$$

aura son module au moins égal à ε. Donc la limite S_E^1 n'existera pas.

Des considérations toutes semblables s'appliquent à l'intégrale par défaut S_D^2. Lorsque D tend vers E, elle pourra tendre vers une limite fixe S_E^2; et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait

$$\lim S_D^2 = 0,$$

lorsque l'aire D tend vers zéro.

19. Les deux intégrales

$$S_D^1 f\,de, \qquad S_D^2 f\,de$$

sont, par définition, les limites des sommes

$$\sum_D M_k\,de_k, \qquad \sum_D m_k\,de_k,$$

où M_k, m_k sont le maximum et le minimum de f dans l'élément infiniment petit de_k. Le maximum L_k du module de f dans cet élément sera la plus grande des deux quantités $|M_k|$, $|m_k|$; on aura donc

$$|\Sigma M_k\,de_k| \leqq \Sigma L_k\,de_k,$$
$$|\Sigma m_k\,de_k| \leqq \Sigma L_k\,de_k,$$

et en passant à la limite

$$|S_D^1| \leqq S_D^1 |f|\,de, \qquad |S_D^2| \leqq S_D^1 |f|\,de.$$

Si donc, lorsque D tend vers zéro, on a

$$(1) \qquad \lim S_D^1 |f|\,de = 0,$$

on aura *a fortiori*

$$(2) \qquad \lim S_D^1 = 0, \qquad \lim S_D^2 = 0,$$

et les deux limites S_E^1, S_E^2 seront déterminées.

20. Nous allons voir que, réciproquement, les conditions (2) entraînent comme conséquence nécessaire la relation (1).

Soit en effet f_1 une fonction égale à f quand f est positif, et à zéro quand f est nul ou négatif; on aura par hypothèse, pour tout champ D d'aire inférieure à un certain nombre δ,

$$|\mathrm{S}^1_{\mathrm{D}} f\, de| < \varepsilon$$

et cette relation devra subsister pour tout champ D_1 contenu dans D. On en conclut aisément que l'intégrale

$$\mathrm{S}^1_{\mathrm{D}} f_1\, de$$

ne peut surpasser ε.

Décomposons en effet le champ D en éléments de_k infiniment petits; soient M_k le maximum de f, M_{1k} celui de f_1 dans l'élément de_k.

On peut prendre les éléments assez petits pour que la différence entre les sommes

$$\Sigma \mathrm{M}_k\, de_k, \quad \Sigma \mathrm{M}_{1k}\, de_k$$

et leurs minima

$$\mathrm{S}^1_{\mathrm{D}} f\, de, \quad \mathrm{S}^1_{\mathrm{D}} f_1\, de$$

soit moindre qu'un nombre arbitraire η.

Il en sera ainsi *a fortiori* si les sommes et les intégrales ci-dessus sont restreintes à une portion des éléments de_k.

Or M_{1k} est égal à M_k dans tout élément où f prend des valeurs positives, égal à zéro dans les autres; on aura donc, en désignant par D_1 l'ensemble des éléments de la première sorte,

$$\mathrm{S}^1_{\mathrm{D}} f_1\, de \overset{=}{>} \sum_{\mathrm{D}} \mathrm{M}_{1k}\, de_k \overset{=}{<} \sum_{\mathrm{D}_1} \mathrm{M}_k\, de_k \overset{=}{<} \mathrm{S}^1_{\mathrm{D}_1} f\, de + \eta \overset{=}{<} \varepsilon + \eta$$

et, en faisant tendre η vers zéro,

$$\mathrm{S}^1_{\mathrm{D}} f_1\, de \overset{=}{<} \varepsilon.$$

Remarquons en second lieu que, le maximum de f dans un ensemble

quelconque étant égal et de signe contraire au minimum de f, on a

$$S_D^2 f\, de = -S_D^1(-f)\, de.$$

Par hypothèse, le premier membre tend vers zéro en même temps que l'aire de D : il en est donc de même du second; et si f_2 désigne une fonction égale à $-f$ lorsque $-f$ est positif, à zéro dans le cas contraire, on aura, d'après ce qui précède,

$$S_D^1 f_2\, de \leqq \varepsilon.$$

Cela posé, on a évidemment

$$|f| = f_1 + f_2.$$

Le maximum de $|f|$ dans un ensemble quelconque est donc au plus égal à la somme des maxima de f_1 et de f_2; on a, par suite,

$$S_D^1 |f|\, de \leqq S_D^1 f_1\, de + S_D^1 f_2\, de \leqq 2\varepsilon.$$

Donc si D tend vers zéro, on aura

$$\lim S_D^1 |f|\, de = 0.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Pour que les intégrales, par excès et par défaut, de la fonction f dans le domaine E soient déterminées toutes deux, il faut et il suffit que l'intégrale par excès de $|f|$ dans ce même domaine soit déterminée.

On remarquera que dans ce cas l'intégrale par défaut de $|f|$ dans E est également déterminée. En effet, l'intégrale par défaut

$$S_D^2 |f|\, de$$

a tous ses éléments positifs ou nuls et au plus égaux à ceux de l'intégrale par excès $S_D^1 |f|\, de$; elle tendra donc vers zéro en même temps que cette dernière, si D tend vers zéro.

21. Soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$ une série déterminée, mais susceptible d'être choisie à volonté, de domaines successifs (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que chacun d'eux contienne le précédent et que l'écart maximum des points de la frontière de D_n à la frontière de E tende vers zéro, quand n tend vers ∞; l'intégrale

$$S^1_{D_n} |f| \, de,$$

sera positive et croîtra avec n. Si elle tend vers ∞ en même temps que n, l'intégrale $S^1_E |f| \, de$ ne pourra être finie et déterminée. Dans le cas contraire, elle tendra vers une limite finie A, qui sera la valeur de l'intégrale $S^1_E |f| \, de$.

En effet, soit D un domaine quelconque (mesurable, parfait et intérieur à E), dont l'aire soit $> E - \delta$. Il existe dans la suite $D_1, \ldots, D_n, \ldots$ un domaine D_m contenant en entier D, et l'on aura

$$S^1_D |f| \, de \leq S^1_{D_m} |f| \, de \leq A.$$

Posons, d'autre part,

$$S^1_{D_n} |f| \, de = A - \varepsilon_n$$

et désignons par μ_n le maximum de $|f|$ dans D_n.

Désignons par d l'ensemble des points de D_n qui n'appartiennent pas à D; l'aire de cet ensemble sera moindre que $E - D$ et *a fortiori* moindre que δ. Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} S^1_D |f| \, de &\geq S^1_{D_n} |f| \, de - S^1_d |f| \, de \\ &> A - \varepsilon_n - \mu_n \delta. \end{aligned}$$

En prenant n suffisamment grand, puis δ suffisamment petit, nous pourrons rendre plus petits que toute quantité donnée, d'abord ε_n, puis $\mu_n \delta$. On aura donc

$$\lim_{\delta = 0} S^1_D |f| \, de = A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

22. Soient enfin E un domaine qui ne soit pas borné; $f(x, y)$ une fonction définie dans ce domaine, laquelle admette, dans tout domaine Δ borné et intérieur à E, une intégrale par excès S^1_Δ, ou une intégrale par défaut S^2_Δ.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait

$$\lim_{D=0} S^1_D = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{D=0} S^2_D = 0$$

pour tout domaine infiniment petit D intérieur à Δ. Et si ces deux conditions sont satisfaites à la fois, elles équivaudront à celle-ci :

$$\lim_{D=0} S^1_D |f|\, de = 0.$$

Soit R l'écart minimum des points de E non contenus dans Δ à un point fixe, l'origine des coordonnées, si l'on veut. Faisons varier Δ, de telle sorte que R tende vers ∞; si l'intégrale $S^1_\Delta f\, de$, par exemple, tend vers une limite fixe, cette limite se nommera l'*intégrale par excès* de f dans le domaine E, et se représentera par $S^1_E f\, de$.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale

$$S^1_\Delta f\, de$$

tende vers zéro, si l'on fait varier Δ de telle sorte que son écart à l'origine tende vers ∞.

En effet, supposons cette condition remplie. Soient Δ et Δ' deux domaines quelconques contenant tous les points de E dont l'écart à l'origine est $< R$; soient d l'ensemble des points de Δ qui n'appartiennent pas à Δ'; d' celui des points de Δ' qui n'appartiennent pas à Δ; on aura évidemment

$$S^1_\Delta - S^1_{\Delta'} = S^1_d - S^1_{d'},$$

et les deux termes du second membre tendent vers zéro pour $R = \infty$.

Supposons, au contraire, que cette condition ne soit pas remplie.

On pourra déterminer un nombre ε tel qu'il existe un domaine d, mesurable, borné et parfait dont l'écart à l'origine soit plus grand que toute quantité donnée, et pour lequel l'intégrale $S_d^1 f de$ ait son module $> \varepsilon$.

Cela posé, soient

Δ un domaine quelconque;
R l'écart minimum des points de E qui n'appartiennent pas à Δ à l'origine;
ρ l'écart maximum des points de Δ à cette même origine.

On peut, quels que soient R et ρ, déterminer d de telle sorte que son écart à l'origine surpasse ρ. Cela posé, les intégrales prises dans les deux domaines Δ et $\Delta + d$ différeront de plus de ε, bien que chacun d'eux contienne tous les points de E dont l'écart à l'origine est $<$ R. L'intégrale S_Δ^1 ne peut donc tendre vers une limite déterminée pour $R = \infty$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent aux intégrales par défaut.

On peut enfin s'assurer, par des considérations toutes semblables à celles des nos **19** à **21**, que, pour que les intégrales par excès et par défaut soient toutes les deux déterminées, il faut et il suffit que l'intégrale par excès du module de f soit finie.

III. — Changements de variables.

25. Soient x, y et u, v deux couples de variables, liées par les relations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v).$$

Nous supposerons que pour tous les points (u, v) d'un domaine E : 1° les dérivées partielles de φ, φ_1 restent continues; 2° leur jacobien J reste différent de zéro; 3° à deux points (u, v) distincts correspondent toujours deux points (x, y) également distincts.

A l'ensemble E des points (u, v) correspondra pour les points

(x, y) un ensemble E′; et si (u, v) décrit un ensemble parfait E_1 d'étendue mesurable, et intérieur à E, (x, y) décrira un ensemble parfait E'_1, intérieur à E′.

Soient maintenant (u, v) un point de E_1; $(u + du, v + dv) = (U, V)$ un point infiniment voisin; (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (X, Y)$ les points correspondants; on aura

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + \mathrm{R}\,du + \mathrm{R}_1\,dv \\ &= dx + \mathrm{R}du + \mathrm{R}_1\,dv, \\ \Delta y &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv + \mathrm{R}_2\,du + \mathrm{R}_3\,dv \\ &= dy + \mathrm{R}_2du + \mathrm{R}_3\,dv,\end{aligned}$$

$\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ tendant uniformément vers zéro avec du, dv dans tout le domaine E_1. Si donc $|du|$ et $|dv|$ restent au-dessous d'un nombre fixe r convenablement choisi,

$$|\mathrm{R}\,du + \mathrm{R}_1\,dv| \quad \text{et} \quad |\mathrm{R}_2\,du + \mathrm{R}_3\,dv|$$

seront moindres que $\varepsilon[|du| + |dv|]$.

Posons

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \qquad \Delta\sigma^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \qquad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2;$$

$\frac{d\sigma}{ds}$ sera dans E_1 une fonction continue de u, v, du, dv, homogène et de degré zéro par rapport à ces dernières quantités et toujours positive. Elle admettra donc un maximum M et un minimum m tous deux positifs.

D'autre part, $\Delta\sigma - d\sigma$ est au plus égal à la distance des points $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ et $(x + dx, y + dy)$ laquelle est elle-même au plus égale à la somme de ses projections $|\mathrm{R}\,du + \mathrm{R}_1\,dv|$ et $|\mathrm{R}_2\,du + \mathrm{R}_3\,dv|$, quantité $< 2\varepsilon[|du| + |dv|] \overline{\overline{<}} 4\varepsilon\,ds$.

Le rapport $\frac{\Delta\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\Delta\sigma - d\sigma}{ds}$ sera donc toujours compris entre les deux nombres fixes $\mathrm{M} + 4\varepsilon$ et $m - 4\varepsilon$.

Cela posé, admettons que le point (U, V) décrive un carré Q de côté infiniment petit ρ contenant le point (u, v). Le point

$$(x + dx, y + dy)$$

décrira, comme on sait, un parallélogramme P d'aire $|J|\rho^2$ et dont le périmètre p sera moindre que $(M + 4\varepsilon)4\rho$. Quant au point

$$(X, Y) = (x + \Delta x, y + \Delta y),$$

sa distance au précédent ne pourra surpasser $2\varepsilon[|du| + |dv|]$, quantité dont le maximum est $4\varepsilon\rho$.

Si donc on construit deux nouveaux parallélogrammes P′ et P″, l'un intérieur, l'autre extérieur à P et dont les côtés soient distants de ceux de P de la quantité $4\varepsilon\rho$, la région R décrite par le point (X, Y) contiendra P′, mais sera contenue dans P″. Or la différence des aires de P′ et de P″ est évidemment égale à $2.4\varepsilon\rho.p$ et par suite moindre que $(M + 4\varepsilon)32\varepsilon\rho^2$. Donc l'aire [extérieure ou intérieure (¹)] de R est égale à $[|J| + \varepsilon']\rho^2$, ε' étant un infiniment petit, moindre que

$$(M + 4\varepsilon)32\varepsilon.$$

Il résulte de là que le domaine E'_1 décrit par (X, Y) lorsque (U, V) décrit le domaine E_1 est quarrable. En effet, E_1 l'étant, par hypothèse, la somme des aires des carrés Q de côté infiniment petit ρ qui rencontrent sa frontière F sera infiniment petite. A chacun d'eux correspond un parallélogramme P″, d'aire $[|J| + \varepsilon']\rho^2 = [|J| + \varepsilon']Q$. L'ensemble de ces parallélogrammes P″ formera un domaine parfait enveloppant la frontière F′ de E'_1 et dont l'aire sera au plus égale à la somme des aires des parallélogrammes P″ (ceux-ci peuvent empiéter les uns sur les autres). En désignant donc par μ le maximum de $|J|$ dans E_1, on

(¹) Ces deux aires sont égales, mais nous ne l'avons pas encore établi.

aura évidemment

$$\sum P'' \overline{\leq} [\mu + (M + 4\varepsilon) 32\varepsilon] \sum Q,$$

quantité qui tend vers zéro en même temps que $\sum Q$.

24. Soit maintenant $f(x, y)$ une fonction de x, y, bornée dans le domaine E'_1. Posons $f(\varphi, \varphi_1) = F(u, v)$. L'intégrale, soit par excès, soit par défaut, de $f(x, y)$ dans le domaine E'_1 sera égale à l'intégrale correspondante de $F(u, v)|J|$ dans le domaine E_1.

En effet, décomposons le plan des u, v en carrés de côté ρ infiniment petits; soient Q_k l'un de ces carrés intérieur à E_1, R_k l'élément correspondant de E'_1 et considérons, par exemple, les intégrales par excès. Soient M_k le maximum de $F(u, v)|J|$ dans Q_k; M'_k celui de $f(x, y)$ dans R_k. Il nous faut montrer que les deux sommes

$$\sum M_k Q_k, \quad \sum M'_k R_k$$

ont même limite.

Or, soit J_k la valeur de J en un point (u_k, v_k) choisi arbitrairement dans le carré Q_k, on aura, comme nous l'avons vu plus haut,

$$R_k = [|J_k| + \varepsilon'_k] Q_k,$$

ε'_k étant moindre que $(M + 4\varepsilon) 32\varepsilon$.

D'autre part, le maximum de $F(u, v) = f(x, y)$ dans Q_k est évidemment M'_k; et celui de $F(u, v)|J|$ est égal à $M'_k \nu_k$, ν étant une quantité intermédiaire entre le maximum N_k et le minimum n_k de $|J|$ dans Q_k. D'ailleurs $|J|$ étant continu dans E_1, on pourra choisir ρ assez petit pour que la différence des quantités N_k, n_k, et *a fortiori* celle des quantités ν_k et $|J_k|$, soit moindre qu'une quantité arbitraire ε''.

Cela posé, on aura

$$\sum M'_k R_k - \sum M_k Q_k,$$

$$\sum [|J_k| + \varepsilon'_k] M'_k Q_k - \sum \nu_k M'_k Q_k,$$

$$\sum [|J_k| + \varepsilon'_k - \nu_k] M'_k Q_k.$$

Or, si ρ tend vers zéro, $|J_k| - \nu_k$ et ε'_k tendent uniformément vers zéro, $|M'_k|$ reste au-dessous d'une limite fixe; enfin $\sum Q_k$ a pour limite l'aire de E_1. Donc la différence tend bien vers zéro.

Nous avons admis jusqu'à présent que, dans tout l'intérieur de E, les dérivées partielles de φ, φ_1 restent continues, et que leur jacobien n'est pas nul. Supposons maintenant que ces conditions cessent d'être satisfaites en certains points de E, mais que l'ensemble des points de E' qui correspondent à ces points d'exception ait une aire nulle. On pourra, quel que soit δ, déterminer un domaine F' d'aire moindre que δ, et renfermant à son intérieur tous les points de ce dernier ensemble.

Soit G'_1 le domaine obtenu en ôtant de E'_1 tous les points intérieurs à F'. Le théorème sera applicable au domaine G'_1; on aura donc, en désignant par G_1 le domaine décrit par (u, v), lorsque (x, y) décrit G'_1,

$$S_{G'_1} f(x, y)\, dx\, dy = S_{G_1} F(u, v)\,|J|\, du\, dv.$$

Supposons que l'on fasse décroître indéfiniment le domaine F'; G_1 et G'_1 tendront respectivement vers E_1 et E'_1; et, si la fonction f est bornée, comme on l'a supposé, dans le domaine E'_1, lui-même borné, le premier membre tendra vers la limite fixe $S_{E'_1} f\, dx\, dy$. Le second membre tendra donc vers la même limite, et l'on aura

$$S_{E'_1} f(x, y)\, dx\, dy = S_{E_1} F(u, v)\,|J|\, du\, dv.$$

Faisons enfin tendre E'_1 vers E_1. Si le premier membre de cette égalité tend vers une limite fixe, qui sera, par définition, $S_{E'} f(x, y)\, dx\, dy$, le second membre tendra de même vers une limite fixe, et l'on aura

$$S_{E'} f(x, y)\, dx\, dy = S_{E} F(u, v)\,|J|\, du\, dv.$$

En résumé, pour que cette formule de transformation soit applicable, il suffit, comme on le voit :

1° Qu'à chaque point (x, y) corresponde un seul point (u, v), et réciproquement;

2° Que les dérivées de φ, φ_1 soient généralement continues et le jacobien J généralement différent de zéro, l'ensemble des points de E' qui pourraient faire exception à cette règle ayant une aire nulle;

3° Que l'intégrale à transformer $S_{E'} f(x, y)\, dx\, dy$ ait une valeur finie et déterminée.

Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor;

Par M. J. HADAMARD,
Ancien élève de l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

Le développement de Taylor rend d'importants services aux mathématiciens, en raison de sa grande généralité. Lui seul, en effet, permet de représenter une fonction analytique quelconque, à certains cas singuliers près.

Depuis les travaux d'Abel et de Cauchy, on sait qu'à toute fonction régulière dans un certain cercle correspond un développement de Taylor, et réciproquement. C'est même ce développement que M. Weierstrass, et, en France, M. Méray emploient pour définir la fonction.

Un point a étant donné au hasard, on pourra, en général, former une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-a$ et qui représentera notre fonction dans le voisinage du point a. Il pourra y avoir exception pour certaines positions particulières du point a. C'est à ces points particuliers que l'on donne le nom de *points singuliers*.

On peut donc dire que se donner une fonction analytique non singulière au point $x=0$, c'est se donner une suite de coefficients a_1,

$a_2, \ldots, a_m, \ldots$, tels que la série $\sum a_m x^m$ ne soit pas toujours divergente. Cette série donnera la fonction dans l'intérieur de son cercle de convergence, et d'ailleurs une fonction ainsi donnée est parfaitement déterminée, si du moins, avec la valeur de la variable, on se donne le chemin par lequel on y aboutit.

C'est, par exemple, sous cette forme que le théorème de Briot et Bouquet fournit les intégrales d'un système d'équations différentielles.

Mais, si ce mode de représentation est très utile pour démontrer l'existence des intégrales, son emploi est très limité au point de vue de l'étude de ces mêmes intégrales. Le développement de Taylor, en effet, ne met pas en évidence les propriétés de la fonction représentée et semble même les masquer complètement.

Cependant on connaît déjà des circonstances où ce développement peut fournir de précieux renseignements difficiles à obtenir par d'autres moyens. On sait, en effet, les remarquables propriétés arithmétiques démontrées par Eisenstein et M. Tchebicheff sur les séries qui représentent des fonctions algébriques ou exprimables par la combinaison de fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires en nombre fini.

J'ai étudié la question à un point de vue différent, celui qu'indique la théorie générale des fonctions, et d'après lequel le premier problème qui se pose est la recherche des points singuliers. Ce problème est d'ailleurs intimement lié à celui de la continuation de la fonction en dehors du cercle de convergence.

Le développement de Taylor ne définit une fonction qu'à l'intérieur d'un certain cercle, à savoir le plus petit qui ait pour centre l'origine et qui passe par un ou plusieurs points singuliers. Si a désigne l'affixe d'un point situé sur le rayon qui va de l'origine à un de ces points singuliers, en ordonnant notre série, non plus suivant les puissances de x, mais suivant celles de $x - a$, le cercle de convergence de cette nouvelle série sera compris entièrement dans l'ancien.

Il n'en sera pas de même si le rayon qui va de l'origine au point $x = a$ coupe la circonférence primitive en un point ordinaire, et, dans ce cas, la nouvelle série permettra de calculer la fonction pour des valeurs

de x qui rendaient l'ancienne divergente. Si l'on veut étudier le prolongement de la fonction en dehors du cercle de convergence, il est donc important de déterminer les points critiques situés sur ce cercle. C'est cette détermination qui fait le principal objet du présent travail.

Il existe, à cet égard, une Note de M. Lecornu, insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹). D'après M. Lecornu, l'affixe du point singulier est la limite vers laquelle tend le rapport de deux coefficients consécutifs, lorsqu'on s'éloigne de plus en plus dans la série. Malheureusement la démonstration donnée par l'auteur est défectueuse, et nous verrons qu'il y a de grandes réserves à faire sur le théorème lui-même.

Quant à la méthode qui m'a servi dans cette recherche, les principes sur lesquels elle repose sont ceux qu'a employés M. Darboux dans son Mémoire bien connu : *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (²), dans un but inverse, il est vrai. Partant de certaines séries dont les points singuliers sont connus, M. Darboux en tire des conclusions relatives aux coefficients de ces séries. Mais le principe fondamental du Mémoire, énoncé par son auteur de la façon suivante : « La recherche de la partie principale des coefficients de la » série dépend de la manière dont la fonction devient infinie sur le » cercle de convergence », est celui-là même qui peut servir à l'étude des points singuliers.

J'ai divisé ce travail en trois Parties :

Dans la première, après avoir introduit une notion préliminaire indispensable pour la suite, je détermine d'une façon générale le rayon de convergence. Les résultats obtenus conduisent immédiatement à un criterium permettant de reconnaître dans certains cas la présence d'un ou plusieurs points singuliers.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude des discontinuités polaires. Lorsque la fonction n'a sur le cercle de convergence que de telles discontinuités, on peut la prolonger analytiquement et la représenter dans tout cercle où elle est méromorphe.

Dans la troisième Partie, je définis ce qu'on peut appeler l'*ordre*

(¹) Séance du 7 février 1887.

(²) *Journal de Liouville*, 3ᵉ série, t. IV.

d'une fonction sur son cercle de convergence et en un point de ce cercle, et j'étudie les points singuliers en les classifiant d'après leur ordre. Lorsque cet ordre reste fini, on peut, dans des cas assez étendus, trouver les points singuliers, et, dans tous les cas, calculer la fonction en tout point ordinaire du cercle de convergence [1].

PREMIÈRE PARTIE.

1. Nous aurons à nous fonder, dans ce qui va suivre, sur quelques principes simples relatifs aux suites infinies, et que je vais résumer tout d'abord.

Soit la suite

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

où u_0, u_1, ..., u_m, ... désignent des nombres réels, mais quelconques d'ailleurs.

Il peut arriver, comme premier cas, que cette suite renferme des termes supérieurs à tout nombre donné; ou encore, que tous les termes aillent en augmentant indéfiniment par valeurs négatives.

Écartons pour le moment ces deux hypothèses. Nous voyons qu'il y aura lieu de répartir les nombres réels, d'après leurs relations de grandeur avec les quantités u_m d'indice très grand, en deux catégories. Un nombre A sera mis dans la classe supérieure si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (1) sont plus petits que A; au contraire, un nombre B appartiendra à la classe inférieure si notre suite contient des termes de rang aussi éloigné qu'on veut, et qui surpassent B.

Si A est un nombre de la classe supérieure, il est clair que tous les nombres supérieurs à A appartiennent à la même classe; pareillement, si le nombre B fait partie de la classe inférieure, on peut en dire autant de tous les nombres moindres que B.

---

[1] Plusieurs des résultats contenus dans le présent travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences (séances du 23 janvier 1888 et du 8 avril 1889).

Or c'est un fait bien connu que, dans ces conditions, il existe un nombre l servant de séparation entre les deux classes, en sorte que la première se compose des nombres plus grands que l; la seconde, des nombres plus petits que l ([1]). Pour déterminer ce nombre, on pourra, par exemple, commencer par faire prendre à un entier la série des valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Il arrivera un moment où cet entier variable passera de la classe inférieure dans la supérieure. Soient a_1 et $a_1 + 1$ les deux nombres entiers consécutifs qui appartiennent ainsi à des catégories différentes. On divisera l'intervalle $(a_1, a_1 + 1)$ en n parties égales et l'on trouvera deux nouveaux nombres a_2, $a_2 + \frac{1}{n}$, différant de $\frac{1}{n}$ et dont l'un est un nombre B, l'autre un nombre A. On partage l'intervalle compris entre ces deux nombres en n parties égales; et poursuivant ainsi indéfiniment, on formera une série d'intervalles compris les uns dans les autres et de plus en plus petits. D'après un théorème connu, les nombres obtenus par ce procédé sont les valeurs approchées d'une même quantité, laquelle répond manifestement à notre objet.

Cette quantité l, telle que, pour toute valeur positive de ε, $l + \varepsilon$ appartienne à la classe supérieure et $l - \varepsilon$ à la classe inférieure, sera dite la *limite supérieure* de la suite (1) *pour m infini*, ou simplement la *limite supérieure* ([2]).

Dans le cas précédemment exclu, où une partie des termes de la suite (1) augmenterait indéfiniment par valeurs positives, ou bien encore lorsque tous iraient en augmentant indéfiniment par valeurs négatives, l'une de nos deux catégories disparaîtrait et la définition

---

([1]) Les mots *plus petits que, plus grands que* n'excluent pas ici l'égalité.

([2]) On pourrait être tenté de prendre les mots *limite supérieure* dans le sens qui leur est attribué en d'autres occasions (notamment lorsqu'on traite des fonctions d'une variable réelle) et qui est un peu différent de celui-ci. En effet, il faudrait alors ne ranger un nombre dans la classe supérieure que lorsqu'il est plus grand que *tous* les termes de la suite (1), et non pas seulement que les termes d'indice suffisamment élevé.

Nous serons donc obligé, lorsqu'on aurait à craindre une confusion, d'employer la locution *limite supérieure pour m infini,* qui ne peut prêter à aucune ambiguïté.

précédente tomberait en défaut. La limite supérieure devrait être regardée comme égale à $+\infty$ dans le premier cas, à $-\infty$ dans le second.

2. ε désignant toujours un nombre positif aussi petit qu'on veut, il existe des quantités u_m, d'indice aussi élevé qu'on le voudra, comprises entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$, puisque, d'après la définition même de l, la suite donnée contient des termes indéfiniment éloignés supérieurs à $l-\varepsilon$, au lieu qu'à partir d'un certain rang elle n'en renferme plus de supérieur à $l+\varepsilon$. Donc *on peut, dans la suite* (1), *trouver une suite partielle qui ait pour limite* l. Bien entendu, il s'agit ici d'une limite, absolument parlant, et non plus seulement d'une limite supérieure telle que nous venons de la définir ([1]).

Il peut même se trouver, comme cas particulier, que u_m s'approche indéfiniment de l pour *toutes* les valeurs de m suffisamment grandes. Il en est ainsi, d'après la remarque précédente, lorsque, si petit que soit ε, l'inégalité $u_m > l-\varepsilon$ est vérifiée, à partir d'un certain rang, pour toutes les valeurs de m et non pas seulement pour une infinité d'entre elles. l devient alors pour la suite (1) une véritable limite, au sens ordinaire du mot. Dans ce cas, il nous arrivera de dire que les termes de la suite (1) *tendent régulièrement vers* l. Cette locution, dont à la rigueur on pourrait se passer, aura l'avantage de bien marquer, sans allonger le discours, la différence qui existe entre ce cas particulier et le cas général.

Si la suite donnée est à termes positifs, elle ne peut avoir o comme limite supérieure sans tendre régulièrement vers cette limite. Car u_m est supérieur à $-\varepsilon$, quel que soit m.

Nous remarquerons encore que la limite supérieure d'une suite n'est

---

([1]) La notion de limite supérieure que nous introduisons ici est en relation avec la théorie des ensembles.

On sait que M. Cantor définit un *ensemble dérivé* dont fait partie toute quantité q telle que l'ensemble primitif contienne une infinité de termes aussi voisins qu'on le veut de q.

Dans cette terminologie, notre limite supérieure serait le plus grand élément de l'ensemble dérivé.

pas altérée lorsqu'on augmente ou diminue les termes de quantités infiniment petites pour m infini.

3. Au lieu de considérer des quantités u_m dépendant d'un seul indice, on peut introduire des quantités $u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$, où figurent p indices indépendants m_1, m_2, ..., m_p variables de o à $+\infty$, et définir d'une façon tout analogue la limite supérieure de $u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ pour $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = \infty$. On formera, à cet effet, les deux classes supérieure et inférieure d'après la règle suivante : un nombre A sera rangé dans la première s'il est supérieur à toutes les quantités u dont les indices m_1, m_2, ..., m_p dépassent tous un entier N convenablement choisi; un nombre B sera placé dans la seconde lorsqu'on pourra trouver des u plus grands que B et dont les indices soient tous supérieurs à tel entier qu'on voudra ([1]).

4. La notion de limite supérieure va nous permettre de déterminer tout d'abord le rayon de convergence d'une série de Taylor, et de résoudre ainsi d'une façon générale le problème traité par M. Lecornu ([2]) dans le cas où le rapport de deux coefficients consécutifs a une limite.

Soit

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x. Nous envisagerons la suite à termes positifs

$$(3) \qquad |a_1|, \quad |\sqrt{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots.$$

([1]) On sait (*voir* CANTOR, *Journal de Borchardt*, t. 84, p. 242) que l'on peut ramener le cas d'un ensemble à p indices au cas d'un ensemble à indice unique. Il est à remarquer que cette assimilation ne s'applique pas dans la question actuelle. La méthode de M. Cantor oblige effectivement à donner un rang élevé à tout terme dans lequel un au moins des indices est très grand, au lieu que nous ne devons considérer comme infiniment éloignés que les termes dans lesquels *tous* les p indices auront de très grandes valeurs.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 février 1887.

Si cette dernière suite contient des termes augmentant indéfiniment, la série donnée n'est jamais convergente, quelle que soit la variable x. Car il existera toujours des valeurs de m en nombre infini pour chacune desquelles, $|\sqrt[m]{a_m}|$ étant plus grand que $\frac{1}{|x|}$, le terme correspondant $a_m x^m$ aura un module supérieur à 1.

5. Ce cas doit donc être laissé de côté, et nous devons supposer que *la suite* (3) *admet une limite supérieure* l.

Donnons à x un module plus petit que $\frac{1}{l}$, soit $\frac{1}{l+\varepsilon}$. Par hypothèse, $l+\frac{\varepsilon}{2}$ appartient à la classe supérieure par rapport à la suite (3). Donc, à partir d'un certain rang, chaque quantité $|a_m|$ est plus petite que $\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^m$ et le module de $\sqrt[m]{a_m x^m}$ est (et reste) inférieur à $\frac{l+\frac{\varepsilon}{2}}{l+\varepsilon}$, nombre fixe plus petit que 1, ce qui montre que la série $\sum a_m x^m$ est convergente.

Au contraire, si nous donnions à x un module $\frac{1}{l-\varepsilon}$ plus grand que $\frac{1}{l}$, comme nous savons que, pour une infinité de valeurs de m, $|a_m|$ est supérieur à $(l-\varepsilon)^m$, la série $\Sigma a_m x^m$ aurait une infinité de termes plus grands que 1 : ce serait une série divergente.

Donc *le rayon de convergence de notre série est* $\rho = \frac{1}{l}$.

Si, en particulier, le rapport $\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}$ tend vers une limite, $|\sqrt[m]{a_m}|$ aura la même limite, qui sera bien par conséquent, ainsi que l'avait énoncé M. Lecornu, l'inverse du rayon de convergence.

Au lieu de $|\sqrt[m]{a_m}|$, nous aurions pu considérer [1] l'expression $\frac{1}{m}\,\mathrm{L}\,|a_m|$, qui est le logarithme de la précédente. La limite supérieure de cette nouvelle quantité, pour m infini, aurait donné le logarithme de l.

---

[1] $\mathrm{L}\,|a_m|$ désigne, comme d'habitude, le logarithme népérien de $|a_m|$.

6. Un cas important est celui où la quantité l est nulle, et où, par suite, $|\sqrt[m]{a_m}|$ tend vers 0, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 2. En ce cas, pour toute valeur attribuée à x, notre série est convergente; car (en désignant par k un nombre quelconque plus petit que 1) à partir du moment où l'on aura $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{k}{|x|}$, le terme général sera inférieur à k^m, c'est-à-dire au terme général d'une série absolument convergente.

La fonction $f(x)$ est donc une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan.

7. Ainsi, lorsque notre limite supérieure est infinie, le développement donné ne définit aucune fonction. Lorsqu'elle est nulle, il définit une fonction entière et permet de la calculer pour toute valeur de la variable.

Au contraire, si la limite supérieure l est finie et différente de 0, le développement (2) définit une fonction $f(x)$, mais n'en fournit d'expression que pour les valeurs de x intérieures au cercle de convergence. Le problème qui se pose actuellement est donc l'étude de cette fonction en dehors du cercle ou sur le cercle, et tout d'abord la détermination des points critiques situés sur la circonférence.

Dans les fonctions les plus simples, telles que $\frac{1}{(\alpha - x)^p}$, par exemple, l'affixe du point singulier s'obtient en prenant la limite du rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$. On peut donc se demander s'il est possible d'énoncer ce résultat sous forme de théorème général.

Pour discuter cette proposition, il est nécessaire d'en préciser la signification. Prise dans son acception la plus étendue, elle voudrait dire que pour toute série où le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ a une limite, le point correspondant est le seul point singulier situé sur le cercle de convergence. Ainsi comprise, la proposition est manifestement fausse : elle ne s'applique pas, par exemple, à la fonction

$$\frac{1}{1-x} + L(1+x) = \sum \left[1 + \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right] x^m.$$

La réciproque est également inexacte : x_0 peut être point singu-

lier unique d'une fonction représentée par la série (2), sans que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tende vers x_0, ainsi que nous en rencontrerons un exemple dans la suite.

Au contraire, lorsque le rapport des coefficients consécutifs tend vers une limite, le point qui a cette limite pour affixe paraît être, en général, *un* point singulier. En tous cas, nous pouvons établir une conclusion très voisine de celle-là.

8. Les résultats précédents nous fournissent en effet un premier criterium permettant de reconnaître les points critiques.

Soit $x = x_0$ un point pris sur le cercle de convergence, et proposons-nous de rechercher si ce point est ordinaire ou singulier.

Nous pouvons d'abord supposer $x_0 = 1$, car nous pourrions ramener le cas général à celui-là par le changement de variable

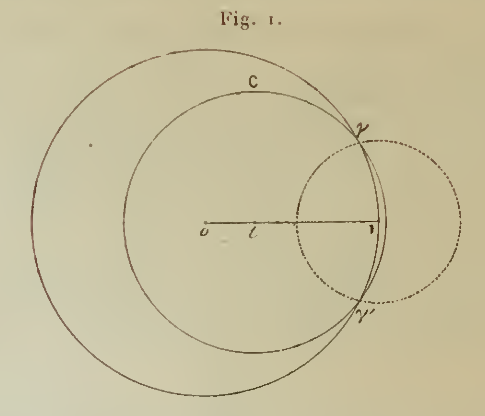
$$(4) \qquad x = x_0 y,$$

dans lequel, à la valeur x_0 donnée à x, correspondrait pour y la valeur $y = 1$.

Soit alors t un nombre réel compris entre 0 et 1, auquel correspond un point de l'axe réel (*fig.* 1). Le rayon de convergence de la série

$$(5) \quad f(x+t) = f(t) + xf'(t) + \frac{x^2}{2} f''(t) + \ldots + \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(t) + \ldots$$

Fig. 1.



sera le rayon du plus grand cercle C décrit du point t comme centre et où la fonction donnée f sera régulière.

Si le point $x = 1$ est point ordinaire, notre fonction sera holomorphe dans un cercle c ayant pour centre ce point $x = 1$, et qui coupera le cercle primitif en deux points γ et γ', par conséquent aussi dans un cercle de centre t et d'un rayon égal à la distance des deux points t et γ, laquelle est supérieure à $1 - t$.

Si, au contraire, le point $x = 1$ est un point critique, le cercle C devra passer par ce point et avoir pour rayon $1 - t$.

Reportons-nous maintenant aux résultats obtenus relativement au rayon de convergence : nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour que le point $x = 1$ soit singulier sera fournie par l'inégalité ([1])

$$\left|\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right| > \left(\frac{1-\varepsilon}{1-t}\right)^m, \tag{6}$$

laquelle devra être vérifiée, si petit que l'on ait pris ε, pour une infinité de valeurs de m.

9. Mettons en évidence le module et l'argument de chaque coefficient a, autrement dit posons

$$a_m = g_m e^{i\alpha_m}.$$

L'inégalité (6) (élevée au carré) pourra s'écrire

$$(6')\left\{\begin{aligned} & g_m^2 + 2(m+1)t g_m g_{m+1}\cos(\alpha_{m+1} - \alpha_m) + \ldots \\ & + t^h \sum_{k=0}^{h} \left[C_{m+k}^k C_{m+h-k}^{h-k} g_{m+k} g_{m+h-k} \cos(\alpha_{m+h-k} - \alpha_{m+k})\right] + \ldots \\ & > \left[1 + 2mt + \frac{2m(2m+1)}{2} t^2 + \ldots + C_{2m+h-1}^h t^h + \ldots\right] (1-\varepsilon)^{2m}; \end{aligned}\right.$$

les lettres C désignant, comme à l'ordinaire, des coefficients binomiaux.

([1]) Il n'y a pas lieu d'écrire l'inégalité

$$\left|\frac{f^{(m)} t}{m!}\right| < \left(\frac{1+\varepsilon}{1-t}\right)^m,$$

car le rayon de convergence de la série (5) ne saurait être inférieur à $1 - t$.

Cette forme donnée à l'inégalité (6) permet de trouver des cas particuliers assez étendus où elle est vérifiée.

Remarquons d'abord que la somme $\sum_{k=0}^{h} C_{m+k}^{k}\, C_{m+h-k}^{h-k}$ est égale à C_{2m+h+1}^{h}. Ceci se reconnaît immédiatement en supposant que la fonction f soit la fonction $\frac{1}{1-x}$. Le premier membre de l'égalité (6) devient alors égal à $\frac{1}{(1-t)^{m+1}}$ et, dans l'inégalité (6′), il faut faire $g_m = 1$, $\alpha_m = 0$. On trouve alors

$$(7) \qquad \frac{1}{(1-t)^{2(m+1)}} = 1 + \ldots + t^h \sum_{k=0}^{h} C_{m+k}^{k}\, C_{m+h-k}^{h-k} + \ldots,$$

ce qui donne la conclusion annoncée.

Supposons maintenant que g_m tende régulièrement ([1]) vers la limite 1 ; que, de plus, pour toutes les valeurs de p et de q suffisamment grandes, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ soit inférieure en valeur absolue à un angle fixe ψ plus petit que $\frac{\pi}{2}$ (l'égalité étant exclue). A partir d'une certaine valeur de m, on aura (η désignant un nombre aussi petit qu'on veut)

$$g_m > (1-\eta)^m, \qquad \cos(\alpha_{m+k} - \alpha_{m+k'}) > \cos\psi;$$

d'où l'on déduit, en ayant égard à la formule (7), que le premier membre de l'inégalité (6′) est supérieur à $\cos\psi \frac{(1-\eta)^{2m}}{[1-t(1-\eta)]^{2(m+1)}}$. Sa racine $m^{\text{ième}}$ sera donc (à un infiniment petit près) au moins égale à $\frac{1-\eta}{1-t(1-\eta)}$, c'est-à-dire (si l'on a pris η suffisamment petit) supérieur à $\frac{1-\varepsilon}{1-t}$, car $\frac{1-\eta}{1-t(1-\eta)}$ a pour limite $\frac{1}{1-t}$ lorsque η tend vers 0. L'inégalité (6′) est donc vérifiée et le point $x = 1$ est un point singulier.

10. Ce résultat subsisterait alors même que l'inégalité $|\alpha_q - \alpha_p| < \psi$

([1]) *Voir* n° 2.

cesserait d'être vraie pour les valeurs de p et de q ne satisfaisant pas à la condition

$$\frac{q-p}{p} < s$$

dans laquelle q est supposé, pour fixer les idées, plus grand que p, et s désigne un nombre positif fixe.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que, pour toutes les valeurs de h inférieures à ms, les évaluations précédentes sont encore applicables : le coefficient de t^h est plus grand que $C_{2m+h+1}^h(1-\eta)^{2m+h}\cos\psi$.

Soit n le plus petit entier supérieur à ms. A partir de la valeur $h=n$, nous ne savons plus si le coefficient de t^h est supérieur à l'expression précédente ; nous ne savons même plus s'il est positif; mais en tout cas sa valeur absolue sera moindre que $C_{2m+h+1}^h(1+\eta')^{2m+h}$ (où η' désigne encore un nombre très petit), de sorte que le premier membre de l'inégalité (6′) sera supérieur à

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\cos\psi\frac{(1-\eta)^{2m}}{[1-t(1-\eta)]^{2(m+1)}} \\ &\quad -\sum_{h=n}^{\infty} C_{2m+h+1}^h t^h[(1+\eta')^{2m+h}+\cos\psi(1-\eta)^{2m+h}]. \end{aligned} \right.$$

Dans le dernier facteur du coefficient de t^h, le second terme $\cos\psi(1-\eta)^{2m+h}$ peut évidemment rentrer dans le premier $(1+\eta')^{2m+h}$, moyennant un accroissement infiniment petit donné à η'. Dans la série qui forme la partie soustractive de l'expression (8), après cette simplification, le rapport d'un terme au précédent, égal à $t(1+\eta')\frac{2m+h+1}{h}$, est moindre que $t(1+\eta')\frac{2+s}{s}$. Cette quantité est plus petite que 1, si l'on a choisi t inférieur à $\frac{s}{(2+s)(1+\eta')}$, et la série est égale au produit d'un facteur fini $\left[\text{de module moindre que } \frac{1}{1-t(1+\eta')\frac{2+s}{s}}\right]$ par son premier terme $C_{2m+n+1}^n(1+\eta')^{2m+n}t^n$.

Or, si l'on applique au coefficient C_{2m+n+1}^n les formules bien connues relatives à la fonction Γ pour de grandes valeurs de l'argu-

ment, on reconnaît que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce premier terme tend vers $\frac{(2+s)^{2+s}}{2^2 s^s}(1+\eta')^{2+s}t^s$, c'est-à-dire, puisque nous pouvons prendre t aussi petit que nous le désirons, vers une limite moindre que $\frac{1-\varepsilon}{1-t}$. La partie soustractive de l'expression (8) est donc infiniment petite par rapport au premier terme et ne modifie pas, par suite, les conclusions établies plus haut.

Si le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ a pour limite l'unité, la racine $m^{\text{ième}}$ de g_m tend régulièrement vers 1 et la différence $\delta_m = \alpha_{m+1} - \alpha_m$ tend vers 0. Nous reconnaissons que le point $x = 1$ est bien un point singulier si le produit $m\delta_m$ reste toujours inférieur à un nombre fixe Q. En effet, s'il en est ainsi, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ sera moindre que ψ tant que le rapport $\frac{q-p}{p}$ ne dépassera pas $\frac{\psi}{Q}$.

11. Mais on peut encore s'affranchir d'une partie des restrictions précédentes, car il n'est pas nécessaire que l'inégalité (6) soit vraie pour toutes les valeurs très grandes de m, mais seulement pour une infinité d'entre elles. Il suffira donc que la série contienne, en nombre infini, des suites interrompues de coefficients

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a_m, & a_{m+1}, & \ldots, & a_{m+n}; \\ a_{m'}, & a_{m'+1}, & \ldots, & a_{m'+n'}; \\ a_{m''}, & a_{m''+1}, & \ldots, & a_{m''+n''}; \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$, $\frac{n''}{m''}$ sont tous supérieurs à un nombre fixe s;

2° $|\sqrt[m]{g_m}|$ tend régulièrement vers 1 quand m augmente indéfiniment par des valeurs correspondant à des termes de ces suites;

3° Si a_p et a_q sont deux coefficients pris dans une même suite, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ est en valeur absolue moindre que ψ.

A chacune de ces suites, à partir d'un certain rang, correspondra une valeur de m pour laquelle l'inégalité (6') sera vérifiée.

Si la troisième condition $(\alpha_q - \alpha_p) < \psi$ était remplacée par la double inégalité

$$(10) \qquad (q-p)\theta - \psi < \alpha_q - \alpha_p < (q-p)\theta + \psi,$$

la fonction donnée admettrait le point singulier $x = e^{-i\theta}$. Ce résultat est équivalent au premier moyennant une transformation (4), effectuée avec la valeur $e^{-i\theta}$ pour x_0.

Sous cette forme, notre proposition se distingue de celles que nous avons données précédemment en ce qu'elle peut, dans certains cas, déceler la présence de plusieurs points singuliers. L'existence de suites (9) correspondant à une certaine valeur de θ n'est, en effet, nullement incompatible avec l'existence de suites analogues, mais pour lesquelles l'angle θ, qui figure dans les conditions (10), aurait des valeurs différentes.

On pourrait même, par ce procédé, former des séries qui admettraient le cercle de convergence comme ligne singulière.

Supposons, par exemple, les nombres rationnels rangés en suite linéaire, comme l'indique M. Cantor, et soit r_λ celui qui occupe le rang λ. Nous considérons une série dans laquelle, pour toutes les valeurs de m comprises entre $(1+s)^\lambda$ et $(1+s)^{\lambda+1}$, le rapport $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ sera égal à $e^{2i\pi r_\lambda}$. Nous aurons une infinité de suites pour lesquelles ce rapport aura la même valeur, car les quantités $e^{2i\pi(r_\lambda+1)}$, $e^{2i\pi(r_\lambda+2)}$, ... sont toutes égales à $e^{2i\pi r_\lambda}$. Le point $x = e^{-2i\pi r_\lambda}$ est donc singulier, quel que soit λ, et par conséquent le cercle de rayon 1 est bien ici une coupure.

12. Signalons encore un autre cas simple où l'on reconnaît que le cercle de convergence est ligne singulière. Soit, par exemple, la série [1],

$$(11) \qquad 1 + bx^c + \ldots + b^\nu x^{c^\nu} + \ldots,$$

qui a été considérée par M. Weierstrass [2] et qui converge dans un

---

[1] c est un entier positif et b un nombre quelconque.

[2] *Voir* du Bois-Reymond, *Journal de Borchardt*, t. LXXIX, p. 30.

cercle de rayon $\rho = \lim b^{-\frac{\nu}{c_\nu}} = 1$. Cette série n'est altérée que dans ses premiers termes par le changement de x en $xe^{\frac{2ki\pi}{c_h}}$, où k et h sont deux entiers arbitraires. Or la fonction correspondante admet nécessairement sur le cercle de rayon 1 au moins un point singulier $x = x_0$. Elle aura donc aussi une singularité en chacun des points

$$x = x_0 e^{\frac{2ki\pi}{c_h}},$$

parmi lesquels on en pourra trouver qui approchent autant qu'on le voudra d'un point quelconque pris sur le cercle.

Les mêmes raisonnements s'appliqueront toutes les fois que les indices des termes non nuls et de plus en plus éloignés auront un commun diviseur de plus en plus grand. En ce cas, le cercle de convergence sera par conséquent une coupure, ainsi que l'avait démontré M. Lerch (¹) dans un cas particulier. M. Weierstrass (²) avait d'ailleurs constaté ce fait sur la série (11).

15. La démonstration précédente offre cet inconvénient qu'elle fait dépendre le résultat d'une question de divisibilité, en sorte qu'il semblerait ne pas subsister nécessairement si, par exemple, on augmentait ou diminuait d'une unité les exposants de quelques puissances de x dans la série (11).

Il n'en est rien, cependant, et l'on peut affirmer que *la série*

$$\sum b_\mu x^{c_\mu}$$

(où les c_μ sont des entiers croissants) *admet son cercle de convergence comme ligne singulière, si le rapport* $\frac{c_{\mu+1} - c_\mu}{c_\mu}$ *est constamment supérieur à un nombre fixe s.*

Pour s'en convaincre, il suffit de donner à m, dans la formule (6'),

(¹) *Acta mathematica*, t. X, p. 87.

(²) *Monatsberichte der königl. Acad. der Wissenschaften zu Berlin*, août 1880.

la valeur $\frac{c_\mu}{u}$, où u est un nombre fixe compris entre 1 et $1+s$, et que nous déterminerons ultérieurement ([1]). Au premier membre, le premier terme non nul est

$$\left(C_{c_\mu}^m g_{c_\mu} t^{c_\mu - m}\right)^2,$$

et, d'après les formules déjà employées au n° **10**, sa racine $2m^{\text{ième}}$ est, pour une infinité de valeurs de μ, supérieure à $\frac{(1-\eta)t^{u-1}u^u}{(u-1)^{u-1}}$.

Cette expression a son maximum pour $u = \frac{1}{1-t}$ et devient égale à $\frac{1-\eta}{1-t}$. Quant aux termes suivants, ainsi qu'on l'a vu plus haut, ils n'influent pas sur le résultat, si l'on a choisi pour t une valeur satisfaisant aux inégalités

$$t(1+\eta')\frac{2+s}{s} < 1, \qquad \frac{(2+s)^{2+s}}{2^2 s^s}(1+\eta')^{2+s} t^s < \frac{1-\varepsilon}{1-t}.$$

La proposition est donc démontrée, car les raisonnements que nous venons de faire ne seraient pas altérés si l'on effectuait la transformation (4) avec la valeur $x_0 = e^{i\theta}$, de sorte que notre fonction admet pour point singulier le point $x_0 = e^{i\theta}$, quel que soit θ.

Bien entendu, le résultat précédent peut subsister, lors même que le rapport $\frac{c_{\mu+1} - c_\mu}{c_\mu}$ ne serait pas constamment supérieur à s. Il suffit qu'il prenne deux valeurs consécutives supérieures à s, et cela une infinité de fois, les modules des coefficients correspondants tendant régulièrement vers 1.

Nous bornerons ici ces remarques préliminaires et, dans les Chapitres qui vont suivre, nous traiterons la question à un point de vue tout différent.

Les points critiques susceptibles d'être reconnus à l'aide des propositions précédentes sont en effet (ainsi qu'il deviendra évident par la

---

([1]) Si $\frac{c_\mu}{u}$ n'est pas entier, il faudra prendre pour m l'entier le plus voisin de $\frac{c_\mu}{u}$.

suite) d'espèces très diverses; au lieu que nous allons maintenant étudier les singularités en les distinguant d'après leur nature et en commençant par les plus simples, à savoir les singularités polaires.

DEUXIÈME PARTIE.

14. *Si la seule singularité située sur le cercle de convergence est un pôle, simple ou multiple, l'affixe de ce point est donné par la limite du rapport* $\frac{a_m}{a_{m+1}}$, comme on le voit en employant les expressions indiquées par M. Darboux ([1]) pour les coefficients.

Par exemple, si la série (2), convergente dans le cercle de rayon ρ, admet pour unique singularité sur ce cercle le pôle simple $x = x_1$, le coefficient a_m peut se mettre sous la forme $\frac{A}{x_1^m} - \frac{\theta_m}{(\rho' - \varepsilon)^m}$, où θ_m désigne une quantité de module inférieur à 1, ε un infiniment petit, et ρ' un rayon supérieur à ρ. On voit alors immédiatement que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tend vers x_1, et cela de telle façon que la différence soit, à partir d'un certain rang, inférieure à $\left(\frac{\rho}{\rho' - \varepsilon}\right)^m$ ou à k^m, k désignant un nombre fixe plus petit que 1.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante.

En effet, pour écrire que le point $x = x_1$ est pôle simple et d'ailleurs singularité unique sur le cercle de convergence, il suffit d'exprimer que, en multipliant la série (2) par $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)$, on obtient une série convergente dans un cercle de rayon plus étendu que le premier. Or, en faisant cette multiplication, on trouve pour terme général

$$x^m \left(a_m - \frac{a_{m-1}}{x_1}\right) = x^m a_{m-1} \left(\frac{a_m}{a_{m-1}} - \frac{1}{x_1}\right).$$

Le coefficient de x^m devient donc plus petit que $\left[\frac{k}{\rho}(1 + \varepsilon)\right]^m$, si la différence $\frac{a_m}{a_{m-1}} - \frac{1}{x_1}$ est moindre que k^m.

([1]) *Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres*, p. 15.

15. Cherchons maintenant dans quels cas notre fonction a pour singularités, sur le cercle de convergence, plusieurs pôles simples ou multiples.

Nous serons tout pareillement conduits à multiplier la fonction donnée $f(x)$ par un polynôme

$$(12) \quad \mathfrak{P}_p(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\mu_1}\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)^{\mu_2}\cdots = 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(p)}x^p,$$

de degré p, et à nous demander si le produit obtenu est une fonction régulière dans un cercle de rayon supérieur à ρ.

16. Après la multiplication, les nouveaux coefficients seront donnés par la formule

$$(13) \qquad b_m = a_{m+p} + A^{(1)}a_{m+p-1} + \ldots + A^{(p)}a_m,$$

et devront satisfaire à l'inégalité

$$|b_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m.$$

Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$,

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & \ldots & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

que la formule (13) permet d'écrire

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & \ldots & a_{m+p-1} & b_m \\ a_{m+1} & \ldots & \ldots & b_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & \ldots & a_{m+2p-1} & b_{m+p} \end{vmatrix}.$$

Sous cette dernière forme, les hypothèses faites sur les a et les b

nous font voir immédiatement que $D_{m,p}$ doit être plus petit que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho^p\rho'}\right)^m$, où ε a toujours la même signification que précédemment, à savoir, un nombre que l'on peut supposer aussi petit qu'on le veut, pourvu que l'on prenne m suffisamment grand.

La limite supérieure, pour m infini, *de* $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ *est donc moindre que* $\frac{1}{\rho^{p+1}}$.

17. Réciproquement, supposons que, pour certaines valeurs de P, la limite supérieure (pour m infini) de $\sqrt[m]{|D_{m,P}|}$ soit moindre que $\frac{1}{\rho^{P+1}}$.

Soit p la plus petite de ces valeurs, et $\frac{1}{\rho^p\rho'}$ la limite supérieure correspondante. Par hypothèse, la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ est $\frac{1}{\rho^p}$.

Je dis, en premier lieu, que $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ *tend régulièrement vers cette limite*. En d'autres termes ([1]), si petit que soit ε, à partir d'un certain rang, chaque déterminant $D_{m,p-1}$ a un module supérieur à $\left(\frac{1-\varepsilon}{\rho^p}\right)^m$.

Nous savons, en effet, qu'il existe une infinité de déterminants $D_{m,p-1}$ plus grands que les valeurs correspondantes de $\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon}{\rho^p}\right)^m$ ou de α^m $\left(\text{en posant } \alpha = \frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon}{\rho^p}, \text{ d'où } \frac{1-\varepsilon}{\rho^p} = \alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}\right)$.

Si, à partir d'un certain rang, tous satisfont à cette condition, notre conclusion est établie. Dans le cas contraire, on devra pouvoir trouver, et cela aussi loin qu'on le voudra dans la série, un déterminant $D_{m_0,p-1}$ supérieur à α^{m_0}, précédé d'un déterminant $D_{m_0-1,p-1}$ moindre que α^{m_0-1}.

Or on a, quel que soit m,

$$(14) \qquad D_{m+1,p-1}D_{m-1,p-1} - D^2_{m,p-1} = D_{m-1,p}D_{m,p-2}.$$

Car les mineurs du déterminant $D_{m-1,p}$ relatifs aux éléments a_{m-1}, a_{m+p-1}, a_{m+2p-1}, qui occupent les angles de ce déterminant, sont res-

([1]) *Voir* au n° 2.

pectivement

$$D_{m+1,\,p-1}, \quad D_{m,\,p-1}, \quad D_{m-1,\,p-1};$$

et le mineur du second ordre obtenu par la suppression des deux lignes et des deux colonnes extrêmes est $D_{m,\,p-2}$. L'égalité (14) n'est donc que l'expression d'une identité bien connue relative aux déterminants.

Cette égalité (14) fournit d'ailleurs, d'après ce que nous savons sur l'ordre de grandeur des déterminants $D_{m,\,p}$ et $D_{m,\,p-2}$, l'inégalité

$$(14') \qquad |D_{m+1,\,p-1}\,D_{m-1,\,p-1} - D^2_{m,\,p-1}| < \left(k\alpha\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}\right)^{2m},$$

où k est un nombre plus petit que 1 ([1]).

Donnons à m la valeur m_0 : nous trouvons

$$|D_{m_0+1,\,p-1}| > \alpha^{m_0+1}(1-k^{2m_0}), \qquad \left|\frac{D_{m_0+1,\,p-1}}{D_{m_0,\,p-1}}\right| > \alpha(1-k^{2m_0}),$$

d'où résulte déjà que, pour m_0 très grand, les quantités $|D_{m_0+1,\,p-1}|$ et $\left|\frac{D_{m_0+1,\,p-1}}{D_{m_0,\,p-1}}\right|$ seront respectivement supérieures à $\left(\alpha\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}\right)^{m_0+1}$ et $\alpha\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}$.

En général, nous allons démontrer que, si l'on a pris le nombre m_0 suffisamment grand, on aura, pour toute valeur positive de l'entier i,

$$(15) \quad \left|\frac{D_{m_0+i,\,p-1}}{D_{m_0+i-1,\,p-1}}\right| > \alpha(1-k^{2m_0})[1-k^{2(m_0+1)}]\ldots[1-k^{2(m_0+i-1)}],$$

$$(16) \quad |D_{m_0+i,\,p-1}| > \alpha^{m_0+i}(1-k^{2m_0})^i[1-k^{2(m_0+1)}]^{i-1}\ldots[1-k^{2(m_0+i-1)}],$$

$$(17) \qquad \sqrt[m_0+i]{|D_{m_0+i,\,p-1}|} > \alpha\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Ces inégalités sont, en effet, vérifiées pour $i=1$. Supposons-les démontrées pour une certaine valeur de i. Je vais faire voir qu'elles sub-

---

([1]) $k = (1+\varepsilon')\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}$.

sisteront pour la valeur suivante, et que l'on pourra écrire

$$(15') \qquad \left|\frac{D_{m_0+i+1,\,p-1}}{D_{m_0+i,\,p-1}}\right| > \alpha(1-k^{2m_0})[1-k^{2(m_0+1)}]\dots[1-k^{2(m_0+i)}],$$

$$(16') \quad |D_{m_0+i+1,\,p-1}| > \alpha^{m_0+i+1}(1-k^{2m_0})^{i+1}[1-k^{2(m_0+1)}]^{i}\dots[1-k^{2(m_0+i-1)}]^{2}[1-k^{2(m_0+i)}],$$

$$(17') \qquad \sqrt[m_0+i+1]{|D_{m_0+i+1,\,p-1}|} > \alpha\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Pour cela, nous ferons $m = m_0 + i$ dans l'inégalité (14'), laquelle, en tenant compte de la formule (17), nous donnera

$$\left|\frac{D_{m_0+i+1,\,p-1}}{D_{m_0+i,\,p-1}}\right| > \left|\frac{D_{m_0+i,\,p-1}}{D_{m_0+i-1,\,p-1}}\right|[1-k^{2(m_0+i)}],$$

dont la multiplication membre à membre avec la formule (15) fournit la formule (15').

Celle-ci, combinée avec (16), donne l'inégalité (16').

Quant à l'inégalité (17'), elle résulte de la précédente, pourvu que l'on ait choisi pour m_0 une valeur suffisamment élevée ; car il vient successivement

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\cdot\sqrt[m_0+i+1]{|D_{m_0+i+1,\,p-1}|}\\
&\quad > (1-k^{2m_0})^{\frac{i+1}{m_0+i+1}}[1-k^{2(m_0+1)}]^{\frac{i}{m_0+i+1}}\dots[1-k^{2(m_0+i)}]^{\frac{1}{m_0+i+1}}\\
&\quad > (1-k^{2m_0})[1-k^{2(m_0+1)}]\dots[1-k^{2(m_0+i)}]\\
&\qquad\qquad > 1-[k^{2m_0}+k^{2(m_0+1)}+\dots+k^{2(m_0+i)}] > 1-\frac{k^{2m_0}}{1-k^2}.
\end{aligned}$$

Il nous suffira donc que l'indice m_0 satisfasse à la condition

$$\frac{k^{2m_0}}{1-k^2} < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon},$$

ce qui est évidemment possible.

L'inégalité (17) est, dès lors, générale, et notre proposition préliminaire est démontrée.

18. Cela posé, déterminons les quantités $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$, ..., $A_m^{(p)}$ par

les équations

$$
(18)\quad \left\{
\begin{array}{l}
a_{m+p} + A_m^{(1)} a_{m+p-1} + A_m^{(2)} a_{m+p-2} + \ldots + A_m^{(h)} a_{m+p-h} + \ldots + A_m^{(p)} a_m = 0, \\
a_{m+p+1} + A_m^{(1)} a_{m+p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m^{(h)} a_{m+p+1-h} + \ldots + A_m^{(p)} a_{m+1} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{m+2p-1} + A_m^{(1)} a_{m+2p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m^{(h)} a_{m+2p-1-h} + \ldots + A_m^{(p)} a_{m+p-1} = 0,
\end{array}
\right.
$$

et posons

$$\delta_m^{(h)} = A_{m+1}^{(h)} - A_m^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Les δ pourront être considérés comme donnés par les équations

$$
(19)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\delta_m^{(1)} a_{m+p} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+p+1-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+1} = 0, \\
\delta_m^{(1)} a_{m+p+1} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+p+2-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+2} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\delta_m^{(1)} a_{m+2p-2} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+2p-1-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+p-1} = 0, \\
\delta_m^{(1)} a_{m+2p-1} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+2p-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+p} + H = 0,
\end{array}
\right.
$$

en introduisant la quantité auxiliaire

$$(20)\qquad H = a_{m+2p} + A_m^{(1)} a_{m+2p-1} + \ldots + A_m^{(p)} a_{m+p}.$$

L'élimination des A entre les équations (18) et (20) donne

$$(21)\qquad H = \frac{D_{m,p}}{D_{m,p-1}},$$

moyennant quoi les équations (19) fournissent

$$(22)\qquad \delta_m^{(h)} = -\frac{D_{m+1,p-2}^{(h)}}{D_{m+1,p-1}} H = -\frac{D_{m,p}\, D_{m+1,p-2}^{(h)}}{D_{m,p-1}\, D_{m+1,p-1}},$$

où $D_{m+1,p-2}^{(h)}$ désigne un déterminant d'ordre $p-1$ formé avec les coefficients a et moindre que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho^{p-1}}\right)^m$.

Comme on a les inégalités

$$\sqrt[m]{|D_{m,p}|} < \frac{1+\varepsilon}{\rho^p \rho'},$$

$$\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} > \frac{1-\varepsilon}{\rho^p},$$

$$\sqrt[m]{|D_{m+1,p-1}|} > \frac{1-\varepsilon}{\rho^p},$$

cette formule (22) montre que la limite supérieure de $\sqrt[m]{|\delta_m^{(h)}|}$ est au plus égale à $\frac{\rho}{\rho'}$.

La série $\sum_m \delta_m^{(h)}$, ayant son terme général de l'ordre de $\left(\frac{\rho}{\rho'}+\varepsilon\right)^m$, est donc convergente et son reste est aussi du même ordre.

$A_m^{(h)}$ tend, par conséquent, lorsque m augmente indéfiniment, vers une limite $A^{(h)}$, et cela de telle façon que la différence $A^{(h)} - A_m^{(h)}$ reste moindre en valeur absolue que $\left(\frac{\rho}{\rho'}+\varepsilon\right)^m$.

Il suffit alors d'écrire la première des équations (18) sous la forme

$$a_{m+p} + A^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + A^{(p)} a_m = \sum_{h=1}^{p} (A^{(h)} - A_m^{(h)}) a_{m+p-h}$$

pour reconnaître que la quantité

$$(13) \qquad b_m = a_{m+p} + A^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + A^{(p)} a_m$$

est moindre que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m$.

L'existence d'un polynôme $\mathfrak{P}$ (12) répondant à la question est donc établie, et nous avons même le moyen de trouver ce polynôme. On devra, d'après ce qui précède, résoudre les équations (18) par rapport aux A et chercher la limite des valeurs de $A_m^{(h)}$ ainsi obtenues, lorsqu'on donne à m des valeurs de plus en plus grandes. L'erreur commise en s'arrêtant à un certain rang m sera comparable au $m^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique décroissante de raison $\frac{\rho}{\rho'}$.

Ainsi *les singularités de notre fonction sur le cercle de rayon ρ se réduisent à des pôles, en nombre égal à p (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité)*, et dont les affixes sont racines d'une équation que nous savons former [1].

Ces pôles exceptés, la fonction est régulière dans le cercle de rayon ρ'.

19. Pour rechercher si les singularités de $f(x)$ situées sur le cercle de rayon ρ' sont aussi des pôles, il suffirait d'appliquer la méthode précédente au produit $f(x)\mathfrak{P}_p(x)$.

Mais on peut aussi opérer directement sur la fonction $f(x)$, ainsi que nous allons le montrer.

Désignons, en général, par l_{P} la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,\mathrm{P}}|}$ et remarquons d'abord que le rapport $\frac{l_{\mathrm{P}-1}}{l_{\mathrm{P}}}$ est égal à ρ tant que P est moindre que p et à ρ' lorsque $\mathrm{P}=p$.

Pour $\mathrm{P}\geqq p$, l_{P} est au plus égal à $\frac{1}{\rho^p\rho'^{\mathrm{P}-p+1}}$. Car le déterminant $D_{m,\mathrm{P}}$ peut s'écrire

$$(23)\quad D_{m,\mathrm{P}}=\begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p-1} & b_m & b_{m+1} & \ldots & b_{m+\mathrm{P}-p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p} & b_{m+1} & b_{m+2} & \ldots & b_{m+\mathrm{P}-p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+\mathrm{P}} & a_{m+\mathrm{P}+1} & \ldots & a_{m+\mathrm{P}+p-1} & b_{m+\mathrm{P}} & \ldots & \ldots & b_{m+2\mathrm{P}-p} \end{vmatrix}.$$

Plus généralement, la formule (13), résolue par rapport à a_{m+p} et appliquée plusieurs fois de suite, permet d'exprimer $a_{m+p}, a_{m+p+1}, \ldots, a_{m+\mathrm{P}}$ en fonction linéaire de $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+p-1}$ et des b.

Ces expressions, reportées dans la valeur de $D_{m,\mathrm{P}}^{(h)}$, lui donnent une forme analogue à la forme (23) et sur laquelle on reconnaît que la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,\mathrm{P}}^{(h)}|}$ est au plus égale à $\frac{1}{\rho^p\rho'^{\mathrm{P}-p+1}}$.

---

[1] Le cas du pôle simple, précédemment étudié, correspond à $p=1$. Les déterminants $D_{m,p-1}$ ne sont autres que les coefficients a_m eux-mêmes.

Les raisonnements précédents subsistent, pourvu qu'on ait soin de remplacer les déterminants $D_{m,p-2}$ et $D_{m,p-2}^{(h)}$ par l'unité.

Nous noterons ce fait que la relation

$$\text{limite sup.}_{m=\infty} \sqrt[m]{|D^{(h)}_{m,P}|} \leq \frac{1}{\rho^p \rho'^{P-p+1}}$$

peut être considérée comme exacte à partir de la valeur $P = p - 1$.

Supposons maintenant que l_P devienne moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{P-p+1}}$, et soit q la plus petite valeur de P pour laquelle cet abaissement se produise (q pouvant être égal à $p+1$ ou plus grand).

On peut aussi définir q comme la plus petite valeur de P pour laquelle le rapport $\frac{l_P}{l_{P-1}}$ devienne inférieur à $\frac{1}{\rho'}$. En particulier, on a

$$\frac{l_q}{l_{q-1}} < \frac{l_{q-1}}{l_{q-2}},$$

ou

(24) $$l_q l_{q-2} < l^2_{q-1}.$$

Si nous nous reportons alors à l'identité (14), dans laquelle nous changerons p en q, nous voyons que la limite supérieure de

$$\left|\sqrt[m]{D_{m+1,q-1}\, D_{m-1,q-1} - D^2_{m,q-1}}\right|$$

est plus petite que l^2_{q-1}.

Dès lors tous les raisonnements donnés au n° **17** peuvent se recommencer en remplaçant p par q et $\frac{1}{\rho^p}$ par l_{q-1}, α étant supposé égal à $l_{q-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et k à $(1+\varepsilon')\sqrt{\frac{l_q l_{q-2}}{l^2_{q-1}}}$.

La conclusion à laquelle on aboutit est que $\sqrt[m]{|D_{m,q-1}|}$ tend régulièrement vers la limite l_{q-1}.

20. Tout pareillement, nous écrirons un système de q équations

$$(18')\quad \left\{\begin{array}{l} a_{m+q} + A'^{(1)}_m a_{m+q-1} + \ldots + A'^{(h)}_m a_{m+q-h} + A'^{(q)}_m a_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m+2q-1} + A'^{(1)}_m a_{m+2q-2} + \ldots + \ldots\ldots\ldots + A'^{(q)}_m a_{m+q-1} = 0, \end{array}\right.$$

analogue au système (18); et si nous posons

$$\delta_m'^{(h)} = A_{m+1}'^{(h)} - A_m'^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, q),$$

il viendra

$$(22') \qquad \delta_m'^{(h)} = -\frac{D_{m,q} D_{m,q-2}^{(h)}}{D_{m,q-1} D_{m+1,q-1}}.$$

Mais $q-2$ étant au moins égal à $p-1$, la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,q-2}^{(h)}|}$ est au plus égale à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p-1}}$, c'est-à-dire à l_{q-2}. La racine $m^{\text{ième}}$ de $\delta_m^{(h)}$ sera donc moindre que $\frac{l_q l_{q-2}}{l_{q-1}^2} + \varepsilon$, de sorte que $A_m'^{(h)}$ tend, pour chaque valeur de h, vers une limite $A'^{(h)}$.

Pour trouver l'ordre de grandeur de la quantité

$$a_{m+q} + A'^{(1)} a_{m+q-1} + \ldots + A'^{(q)} a_m,$$

il est nécessaire de faire subir aux équations (18′) une transformation.

Nous avons vu, au numéro précédent, que les quantités a_{m+p}, a_{m+p+1}, ..., a_{m+P} sont liées à a_m, a_{m+1}, ..., a_{m+p-1}, b_m, b_{m+1}, ..., b_{m+P-p}, par un système S_P de $P-p+1$ relations linéaires à coefficients indépendants de m, système qui peut être résolu par rapport à a_{m+p}, ..., a_{m+P} comme par rapport à b_m, ..., b_{m+P-p}. On peut donc, au lieu des équations (18′), écrire les suivantes

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & b_{m+q-p} + B_m^{(1)} b_{m+q-p-1} + \ldots \\ & \qquad + B_m^{(q-p)} b_m + \alpha_m^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + \alpha_m^{(p)} a_m = 0, \\ & b_{m+q-p+1} + B_m^{(1)} b_{m+q-p} + \ldots \\ & \qquad + B_m^{(q-p)} b_{m+1} + \alpha_m^{(1)} a_{m+p} + \ldots + \alpha_m^{(p)} a_{m+1} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & b_{m+2q-p-1} + B_m^{(1)} b_{m+2q-p-2} + \ldots \\ & \qquad + B_m^{(q-p)} b_{m+q-1} + \alpha_m^{(1)} a_{m+p+q-2} + \ldots + \alpha_m^{(p)} a_{m+q-1} = 0, \end{aligned} \right.$$

qui équivalent aux équations (18′) moyennant les relations S_q. On passe des coefficients B et α aux A', et inversement, par une substitution linéaire Σ_q à coefficients indépendants de m.

Si nous formons les différences

$$B_{m+1}^{(h)} - B_m^{(h)}, \quad \alpha_{m+1}^{(k)} - \alpha_m^{(k)}, \quad (h = 1, 2, \ldots, q - p;\ k = 1, 2, \ldots, p),$$

nous voyons que les premières sont inférieures à $\left(\frac{l_q l_{q-2}}{l_{q-1}^2} + \varepsilon\right)^m$. Quant aux secondes, elles se présentent sous la forme du produit de

$$\frac{D_{m,q}}{D_{m,q-1} D_{m+1,q-1}}$$

par un déterminant $\omega_{m,q-2}^{(k)}$ se déduisant du déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{m+q-p-1} & \ldots & b_m & a_{m+p-1} & \ldots & a_m \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m+2q-p-2} & \ldots & b_{m+q-1} & a_{m+q+p-2} & \ldots & a_{m+q-1} \end{vmatrix}$$

par la suppression de la dernière ligne et de l'une des *p dernières* colonnes, et qui, par conséquent, est moindre que $\left(\frac{1}{\rho^{p-1}\rho'^{q-p}} + \varepsilon\right)^m$ ou que $\left(l_{q-2}\frac{\rho}{\rho'} + \varepsilon\right)^m$.

Les limites des quantités α sont d'ailleurs nulles, ainsi qu'on le reconnaît en résolvant, par rapport aux α, les p premières équations (25), où les B, qui sont des quantités finies, sont regardés comme connus; et si $B^{(h)}$ désigne la limite de $B_m^{(h)}$ pour m augmentant indéfiniment, le système de nombres $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(q-p)}$, o, o, ..., o est celui même que l'on déduit du système $A'^{(1)}, \ldots, A'^{(q)}$ par la substitution Σ_q, de sorte que la somme $a_{m+q} + A^{(1)} a_{m+q-1} + \ldots + A^{(q)} a_m$ est, moyennant les relations S_q et Σ_q, identiquement égale à

$$b_{m+q} + B^{(1)} b_{m+q-1} + \ldots + B^{(q-p)} b_m.$$

Or cette dernière, d'après les évaluations obtenues pour $B^{(h)} - B_m^{(h)}$ et $\alpha^{(k)} - \alpha_m^{(k)}$, est inférieure à $\left(\frac{l_q}{l_{q-1}} + \varepsilon\right)^m$.

Nous avons donc formé un polynôme

$$\varphi_q'(x) = 1 + A'^{(1)} x + \ldots + A'^{(q)} x^q$$

tel que le produit $\mathfrak{P}'_{(q)}(x)f(x)$ soit holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que ρ' $\left(\rho'' = \frac{l_{q-1}}{l_q}\right)$.

Comme cela était évident *a priori*, ce polynôme $\mathfrak{P}'_q$ contient en facteur le polynôme $\mathfrak{P}_p$; il est identique au produit

$$\mathfrak{P}_p(1 + B^{(1)}x + \ldots + B^{(q-p)}x^{q-p}).$$

Il n'existe d'ailleurs pas de pareil polynôme $\mathfrak{P}'$ pour un degré $q - i$ moindre que q; sans quoi, si l'on désignait par c_m les coefficients du produit $f\mathfrak{P}'_{q-i}$, le déterminant $D_{m,q-i}$ pourrait s'écrire

$$D_{m,q-i} = \begin{vmatrix} a_m & \ldots & a_{m+p-1} & b_m & b_{m+q-i-p-1} & c_m \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m+q-i} & \ldots & a_{m+q+p-i-1} & b_{m+q-i} & b_{m+2(q-i)-p-1} & c_{m+q-i} \end{vmatrix},$$

et sa racine $m^{\text{ième}}$ aurait une limite supérieure moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-i-p+1}}$, ce qui, d'après nos hypothèses, ne peut arriver que pour $i = 0$.

La fonction $f(x)$ admet donc p pôles sur la circonférence de rayon ρ et $q - p$ sur la circonférence de rayon ρ' (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité). Ces pôles exceptés, elle est régulière dans un cercle de rayon $\rho'' = \frac{l_{q-1}}{l_q}$.

21. Rien n'empêche de recommencer à nouveau ces raisonnements.

Premièrement, on démontrera que, pour $P \geqq q$, les limites supérieures de $D_{m,P}$ et de $D^{(h)}_{m,P}$ sont au plus égales à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p} \rho''^{P-q+1}}$. En désignant par r la plus petite valeur de P telle que l_P soit moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p} \rho''^{P-q+1}}$, on remarquera d'abord que l'inégalité

$$(26) \qquad \lim_{m=\infty}. \sup. \sqrt[m]{|D^{(h)}_{m,P}|} \leqq l_P$$

est vérifiée pour les valeurs de P comprises entre q et r, comme elle l'était déjà pour les valeurs moindres que q, et l'on partira ensuite de

la relation

$$l_r l_{r-2} < l_{r-1}^2$$

pour effectuer des opérations analogues aux précédentes ([1]) et calculer un polynôme $\mathfrak{P}_r''$ tel que le produit $f\mathfrak{P}_r''$ soit holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que ρ''. On démontrera, comme tout à l'heure, qu'il ne peut exister aucun polynôme $\mathfrak{P}''$ de degré moindre que r.

Notre fonction est donc méromorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho''' = \frac{l_{r-1}}{l_r}$. Elle admet dans ce cercle r pôles, à savoir p de module ρ, $q-p$ de module ρ', $r-q$ de module ρ''.

On pourra continuer ainsi tant que l'on trouvera des valeurs de P satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{l_{\mathrm{P}}}{l_{\mathrm{P}-1}} < \frac{l_{\mathrm{P}-1}}{l_{\mathrm{P}-2}}, \tag{27}$$

et, par conséquent, on peut énoncer les conclusions suivantes :

Le rapport $\frac{l_{\mathrm{P}-1}}{l_{\mathrm{P}}}$ ne va jamais en diminuant.

Si pour $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{(\lambda)}$, ce rapport prend une valeur

$$\rho^{(\lambda)} = \frac{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}-1}}{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}}},$$

supérieure à $\frac{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}-2}}{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}-1}}$, la fonction $f(x)$ est méromorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$; elle y admet en tout $\mathrm{P}^{(\lambda)}$ pôles (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

([1]) Nous avons utilisé, pour la transformation des déterminants $D_{m,\mathrm{P}}^{(h)}$ et des équations (18′), les relations linéaires qui permettent d'exprimer les coefficients $a_{m+p}, \ldots, a_{m+q}$ en fonction de $a_m, \ldots, a_{m+p-1}$ et des b.

Les relations analogues qu'il convient d'employer ici sont celles qui donnent $a_{m+\mathrm{P}}$ en fonction linéaire de $a_m, \ldots, a_{m+p-1}, b_m, \ldots, b_{m+q-p-1}, c_m, \ldots, c_{m+\mathrm{P}-q-1}$ (c_m désignant un coefficient du produit $f\mathfrak{P}'$), et de même les substitutions des opérations suivantes introduiraient 4, 5, ... séries de coefficients.

Au reste, il faut remarquer que ces relations ne servent qu'à la démonstration. Elles n'interviennent pas dans le calcul des polynômes $\mathfrak{P}$.

Si l'on a

$$P^{(\lambda+1)} = 1 + P^{(\lambda)},$$

$f(x)$ n'admet qu'un seul pôle $x = \xi$ sur le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$ et le polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda+1)}$ est égal au produit $\mathfrak{P}^{(\lambda)}\left(1 - \frac{x}{\xi}\right)$. Or, dans le polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$, le coefficient de la plus haute puissance de x est $\lim \frac{D_{m,P^{(\lambda)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda)}}}$, et dans le polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda+1)}$, il est $\lim \frac{D_{m,P^{(\lambda+1)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda+1)}}}$. L'affixe du pôle unique est donc donnée par la formule

$$(28) \qquad \xi = \lim_{m=\infty} \frac{D_{m,P^{(\lambda)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda)}}} : \frac{D_{m,P^{(\lambda+1)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda+1)}}},$$

et les erreurs commises en s'arrêtant aux valeurs successives de m diminuent comme les termes d'une progression géométrique décroissante ayant pour raison $\frac{\rho^{(\lambda)}}{\rho^{(\lambda+1)}}$.

22. Si nous envisageons la suite des quantités $l_1, l_2, \ldots, l_P, \ldots$, nous sommes conduits à distinguer les cas suivants :

1° A partir d'un certain moment, l_P devient nul. La fonction n'a dans tout le plan qu'un nombre limité de pôles. Elle est égale au quotient d'une fonction holomorphe par un polynôme entier.

2° Le rapport $\frac{l_P}{l_{P-1}}$ tend vers 0 lorsque P augmente indéfiniment. Notre fonction n'a que des pôles dans un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut. Elle est donc méromorphe dans tout le plan.

Nous avons d'ailleurs tous les éléments nécessaires pour former la fonction holomorphe $G(x)$ qui admet pour zéros les pôles de $f(x)$, avec le même ordre de multiplicité.

En premier lieu, les modules des pôles successifs sont les valeurs de $\frac{l_{P-1}}{l_P}$. Le genre de la fonction $G(x)$, s'il existe, sera un nombre γ tel que la série $\sum\left(\frac{l_P}{l_{P-1}}\right)^\gamma$ soit convergente.

Si ce nombre est égal à 1, la fonction $G(x)$ sera la limite du produit

convergent

$$\prod_n \left(1 - \frac{x}{x_n}\right),$$

x_n étant l'affixe du $n^{\text{ième}}$ pôle, et par conséquent la limite, pour λ infini, du polynôme

$$\mathfrak{P}^{(\lambda)}(x) = \prod_{n=1}^{p(\lambda)} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

Si le nombre γ est supérieur à 1, on sait qu'il faudrait multiplier chacun des facteurs $\left(1 - \dfrac{x}{x_n}\right)$ par $e^{-\int\left(\frac{1}{x_n} + \frac{x}{x_n^2} + \ldots + \frac{x^{\gamma-2}}{x_n^{\gamma-1}}\right)dx}$.

Or la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{p(\lambda)} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{x}{x_n^2} + \ldots + \frac{x^{\gamma-2}}{x_n^{\gamma-1}}\right)$ constitue les $\gamma - 1$ premiers termes du développement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{p(\lambda)} \left(\frac{1}{x - x_n}\right) = \frac{d}{dx} \log \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)$.

La fonction $G(x)$ sera donc la limite, pour λ infini, de l'expression

$$\mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)\, e^{-\int Q_\lambda(x)\, dx},$$

où $Q_\lambda(x)$ désigne l'ensemble des $\gamma - 1$ premiers termes dans le développement de $\dfrac{d}{dx} \log \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)$ suivant les puissances croissantes de x.

Si enfin il n'existait pas de genre fini, il faudrait calculer les affixes des différents pôles et appliquer telle quelle la méthode de M. Weierstrass.

Dans ces différents cas, on peut d'ailleurs obtenir le développement taylorien de $G(x)$.

La fonction $G(x)$ est en effet la limite de fonctions holomorphes

$$G^{(\lambda)} x = a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} x + \ldots + a_m^{(\lambda)} x^m + \ldots,$$

où les coefficients $a^{(\lambda)}$ peuvent être considérés comme donnés par la formule

$$a_m^{(\lambda)} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{G^{(\lambda)}(z)}{z^m}\, dz,$$

C désignant un contour fermé décrit autour de l'origine et que nous pourrons supposer, pour fixer les idées, intérieur au cercle de convergence primitif.

Sur ce contour, $G^{(\lambda)}(z)$ tend uniformément vers sa limite $G(z)$ quand λ augmente indéfiniment et par conséquent, dans les mêmes conditions, $a_m^{(\lambda)}$ a pour limite a_m.

La fonction $G(x)$ étant ainsi calculée, le produit $f(x)G(x)$ sera une fonction $F(x)$ holomorphe dans tout le plan, et dont la multiplication des séries f et G nous fournira d'ailleurs le développement; de sorte que nous aurons l'expression de la série donnée sous forme du quotient de deux fonctions entières

$$f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

3° Le rapport $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ reste invariable à partir d'une certaine valeur $P^{(\lambda)}$. $f(x)$ est alors le quotient par un polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ d'une fonction régulière dans un cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$, mais présentant sur ce cercle des singularités autres que des pôles. C'est à l'étude de cette dernière fonction (dont on peut avoir le développement de Taylor) qu'est ramenée l'étude de la proposée.

4° Enfin, il peut arriver que le rapport $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ tende vers une limite $\frac{1}{R}$ différente de o, de sorte que les rayons $\rho^{(\lambda)}$ tendent vers R. La fonction f, méromorphe dans chacun des cercles $\rho^{(\lambda)}$, admet une infinité de pôles dans le voisinage du cercle de rayon R.

Nous pourrons chercher à former une fonction $G(x)$ qui admette pour zéros les pôles de $f(x)$, en appliquant la méthode de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler.

Nous prendrons d'abord une suite de nombres positifs $\alpha^{(\lambda)}$ qui tendent ([1]) vers o; puis une suite de quantités positives $\varepsilon^{(\lambda)}$ telles que la série $\Sigma\varepsilon^{(\lambda)}$ soit convergente. Si $V^{(\lambda)}(x)$ désigne alors le polynôme qui a

([1]) Les pôles étant ici distribués en nombre infini dans le cercle de rayon R et non point dans tout le plan, nous sommes obligés de modifier légèrement la méthode de M. Weierstrass, qui laisse les quantités α finies.

pour racines les affixes des pôles situés sur le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$, autrement dit le quotient

$$V^{(\lambda)}(x) = \frac{\varphi^{(\lambda+1)}(x)}{\varphi^{(\lambda)}(x)},$$

$\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x)$ sera développable en série uniformément convergente dans le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$, et l'on pourra en retrancher un polynôme $Q^{(\lambda)}(x)$ tel que la différence $\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x) - Q^{(\lambda)}(x)$ soit, à l'intérieur de ce cercle, moindre que $\varepsilon^{(\lambda)}$.

D'ailleurs $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$ tend vers R, puisque $\alpha^{(\lambda)}$ tend vers o; et, par suite, un point quelconque x pris à l'intérieur du cercle de rayon R sera, à partir d'une certaine valeur de λ, intérieur à tous les cercles de rayons $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$. Il en résulte que la série

$$\sum \left[\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x) - Q^{(\lambda)}(x)\right]$$

sera convergente à l'intérieur du cercle de rayon R et que nous pourrons prendre pour notre fonction $G(x)$ le produit

$$(29) \qquad \prod_{\lambda=0}^{\infty} V^{(\lambda)}(x)\, e^{-\int Q^{(\lambda)}(x)\,dx}.$$

G est donc une limite de fonctions holomorphes $G^{(\lambda)}(x)$, obtenues en prenant de plus en plus de facteurs dans le produit infini (29). On démontrera d'ailleurs, ainsi qu'il a été expliqué pour le cas où $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ tend vers o, que chaque coefficient de $G(x)$ est la limite, pour λ infini, du coefficient de même rang dans $G^{(\lambda)}(x)$, et l'on pourra ainsi développer G en série.

La multiplication des fonctions f et G fournira une fonction F holomorphe également dans le cercle de rayon R. L'étude de la fonction donnée est donc ramenée à celle de deux fonctions F et G, holomorphes dans le cercle R, mais présentant sur ce cercle des singularités non polaires, et dont on peut obtenir les développements. f sera donnée par le quotient de ces deux fonctions.

25. Si

$$(30) \qquad \psi(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots$$

désigne une fonction régulière à l'intérieur d'un certain cercle et ne s'annulant pas à l'origine, de sorte que C_0 est différent de o, les résultats précédents nous fournissent une méthode pour calculer les zéros de $\psi(x)$ à l'intérieur de ce cercle; car les zéros de $\psi(x)$ sont les pôles de la fonction

$$(2') \qquad f(x) = \frac{1}{\psi(x)} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

C'est à cette manière de procéder que revient, au fond, la formule de Bernoulli, qui donne la racine de plus petit module comme limite du rapport de deux coefficients consécutifs dans le développement de la dérivée logarithmique. Il suffit, en effet, pour obtenir cette formule, d'appliquer à la dérivée logarithmique la proposition du n° **14**.

M. Runge [1] a généralisé la formule de Bernoulli en obtenant sous une forme analogue la $\nu^{\text{ième}}$ racine d'un polynôme (en supposant les racines rangées par ordre de module croissant). Les méthodes données dans les Chapitres précédents conduisent à des résultats équivalents, mais applicables à une fonction quelconque dans tout cercle où elle est régulière. En supposant calculés les coefficients $a_0, \ldots, a_m, \ldots$ de $\frac{1}{\psi(x)}$, la racine de rang $P^{(\lambda)}$, si elle est seule de son module, sera donnée par la formule (28). Si plusieurs racines ont le même module, on les obtiendra ensemble comme racines d'une équation algébrique formée en égalant à o le quotient de deux polynômes $\mathfrak{P}$ consécutifs.

Le calcul des coefficients a_m et des déterminants $D_{m,p}$ à l'aide des coefficients C de la fonction donnée peut d'ailleurs se faire de la façon suivante.

En développant, suivant les puissances croissantes de x, le produit

---

(1) *Acta mathematica*, t. VI, p. 316.

$f(x)F(x)$, qui est égal à 1, nous aurons, pour déterminer les coefficients a, les équations

$$(31)\qquad \begin{cases} 1 = a_0 C_0, \\ 0 = a_0 C_1 + a_1 C_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 = a_0 C_m + a_1 C_{m-1} + \dots + a_m C_0. \end{cases}$$

De ces équations nous tirerons

$$(32)\qquad a_m = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ C_{m-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_0 \\ C_m & \dots & \dots & \dots & \dots & C_1 \end{vmatrix}}{(-1)^m C_0^{m+1}}.$$

24. Pour calculer les déterminants $D_{m,p}$, nous utiliserons les formules (20) et (21).

Dans ces formules, on suppose que la fonction $f(x)$ a été multipliée par un polynôme

$$1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p$$

tel que le produit

$$(1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p) f(x) = \frac{1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p}{\psi(x)}$$

manque des termes en $x^{m+p}, x^{m+p+1}, \dots, x^{m+2p-1}$, et la quantité

$$(21)\qquad H = \frac{D_{m,p}}{D_{m,p-1}}$$

est égale au coefficient de x^{m+2p}.

Nous égalerons donc le produit $f(x)\sum a'_m x^m$, non plus à 1, mais à $1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p$, en faisant

$$a'_{m+p} = a'_{m+p+1} = \dots = a'_{m+2p-1} = 0, \qquad a'_{m+2p} = H,$$

et nous aurons les équations

$$(33)\quad \begin{cases} 1 = C_0 a'_0, \\ 0 = C_{p+1} a'_0 + C_p a'_1 + \ldots + C_0 a'_{p+1}, \\ 0 = C_{p+2} a'_0 + C_{p+1} a'_1 + \ldots + C_1 a'_{p+1} + C_0 a'_{p+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = C_{m+p-1} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_0 a'_{m+p-1}, \\ 0 = C_{m+p} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_1 a'_{m+p-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = C_{m+2p-1} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_p a'_{m+p-1}, \\ 0 = C_{m+2p} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_{p+1} a'_{m+p-1} + HC_0. \end{cases}$$

Nous n'avons pas écrit les équations obtenues par la comparaison des coefficients de x, x^2, ..., x^p, car elles ne serviraient qu'à donner la valeur des paramètres auxiliaires $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$, ..., $A_m^{(p)}$. Les $m+p+1$ équations-restantes donnent

$$(34)\qquad H = \frac{(-1)^{m+p} E_{m,p}}{C_0^2 E_{m,p-1}}$$

en posant

$$(35)\quad E_{m,p} = \begin{vmatrix} C_{p+1} & C_p & \ldots & C_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_{p+2} & C_{p+1} & \ldots & C_1 & C_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_0 \\ C_{m+p} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m+2p} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_{p+1} \end{vmatrix}.$$

Ainsi la quantité $\dfrac{C_0^{2p} D_{m,p}}{(-1)^{mp+\frac{p(p+1)}{2}} E_{m,p}}$ ne change pas quand on augmente ou diminue p d'une unité, m restant le même. Or, pour $p = 0$,

elle est égale à $\frac{(-1)^m}{C_0^{m+1}}$, d'après la formule (32). On a donc

$$(36) \qquad D_{m,p} = (-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{C_0^{m+2p+1}}.$$

Telle est l'expression de $D_{m,p}$, qu'il suffira de reporter dans la formule (28) pour calculer la racine ξ.

25. Au lieu de considérer la limite supérieure de $\sqrt[m]{|a_m|}$, pour déterminer le rayon de convergence, il revient au même, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (n° 5), de chercher la limite supérieure de $\frac{L|a_m|}{m}$.

La recherche des discontinuités polaires situées sur le cercle de convergence peut, dès lors, être regardée comme un cas particulier du problème suivant, que nous allons traiter et dont la solution nous sera utile plus tard :

Étant données la série

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et une fonction positive

$$M = \varphi(m),$$

qui augmente constamment et indéfiniment avec m, mais de telle façon que $\frac{L\varphi(m+1)}{L\varphi(m)}$ *tende vers* 1, *soit* ω *la limite supérieure pour m infini, de* $\frac{L|a_m|}{LM}$.

Exprimer qu'en multipliant la série (2) *par un polynôme de degré p convenablement choisi*

$$(12) \qquad \mathfrak{P}_p = 1 + A^{(1)}x + A^{(2)}x^2 + \ldots + A^{(p)}x^p,$$

on peut diminuer la valeur de cette limite supérieure, c'est-à-dire

qu'en opérant sur la nouvelle série

$$f(x)\varphi(x) = \sum b_m x^{m+p}$$

comme sur la première et formant la limite supérieure de $\frac{\mathrm{L}|b_m|}{\mathrm{LM}}$, *on trouvera une quantité* ω' *plus petite que* ω.

Afin de simplifier l'écriture, nous conviendrons de représenter indistinctement par la lettre θ divers nombres de module inférieur à 1, et par la lettre ε différents nombres infiniment petits pour m infini. Nous pourrons écrire, avec cette nouvelle notation,

$$(37) \qquad b_m = a_{m+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_m = \theta \mathrm{M}^{\omega'+\varepsilon}.$$

Dans cette égalité, remplaçons m successivement par $m_0, m_1, \ldots, m_p$, où $m_0, m_1, \ldots, m_p$ sont $p+1$ entiers tous très grands. Nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} a_{m_0+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m_0+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_{m_0} = \theta \mathrm{M}_0^{\omega'+\varepsilon}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m_p+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m_p+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_{m_p} = \theta \mathrm{M}_p^{\omega'+\varepsilon}. \end{array}\right.$$

Nous considérerons maintenant le déterminant d'ordre $p+1$

$$(38) \qquad \Delta^{(p)}_{m_0, m_1, \ldots, m_p} = \begin{vmatrix} a_{m_0} & \ldots & a_{m_p} \\ a_{m_0+1} & \ldots & a_{m_p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m_0+p} & \ldots & a_{m_p+p} \end{vmatrix}.$$

Chaque colonne de ce déterminant correspond, comme on le voit, à l'un des indices $m_0, m_1, \ldots, m_p$. Le mineur relatif à l'élément a_{m_i+k}, pris dans la colonne correspondant à l'indice m_i, étant désigné par la notation $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$, la formule (37) montre que notre déterminant peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(0,p)} b_{m_0} + \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(1,p)} b_{m_1} + \ldots + \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(p,p)} b_{m_p}.$$

Il y aura donc au moins une valeur de i pour laquelle on aura

$$|\Delta^{(p)}| \leqq p \left| \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, p)} \right|,$$

et, par conséquent,

$$\left| \frac{\Delta^{(p)}}{\left[\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, p)} \right]} \right| = 0 M_i^{\omega' + \varepsilon},$$

d'où la conclusion suivante :

Si, pour chaque déterminant $\Delta^{(p)}_{m_0, \ldots, m_p}$, *on prend la plus petite des quantités* $\frac{1}{L M_i} L \left| \frac{\Delta^{(p)}}{\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}} \right|$, *la limite supérieure, pour* $m_0, \ldots, m_p$ *infinis* (n° **5**) *du résultat ainsi obtenu* ([1]) *devra être plus petite que* ω, *au plus égale à* ω'.

26. Réciproquement, supposons que cette condition soit vérifiée pour une certaine valeur de p, et que l'on arrive, en suivant la marche indiquée ci-dessus, à une limite supérieure moindre que ω. Nous pouvons admettre que cette valeur de p est la plus petite pour laquelle il en soit ainsi, et que par conséquent il existe des déterminants $\Delta^{(p-1)}_{m_0, \ldots, m_{p-1}}$ à indices tous aussi élevés qu'on le veut, tels que chacun des quotients $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\left[\frac{\partial \Delta^{(p-1)}}{\partial(i, k)} \right]}$ soit supérieur à $M_i^{\omega - \varepsilon}$. Pour abréger, nous donnerons à ces déterminants le nom de *déterminants principaux*. Ainsi, l'on a, pour un déterminant principal,

$$\frac{\Delta^{(p-1)}}{\left(\frac{\partial \Delta^{(p-1)}}{\partial(i, k)} \right)} = \frac{1}{0} M_i^{\omega - \varepsilon} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, p - 1).$$

([1]) Nous considérons tous les quotients $\frac{\Delta}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial i, k} \right)}$, au lieu de nous en tenir, comme notre raisonnement nous l'indiquait, à ceux pour lesquels le nombre k est égal à p. Il est clair que la conclusion donnée dans le texte subsiste *a fortiori* dans ces nouvelles conditions.

Au lieu du déterminant $\Delta^{(p-1)}$, nous introduirons un déterminant $\mathfrak{D}$, défini de la façon suivante :

Au-dessous du déterminant $\Delta^{(p-1)}$, écrivons la ligne $a_{m_0+p}, \ldots, a_{m_{p-1}+p}$. Nous formons ainsi un tableau rectangulaire

$$(39) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} a_{m_0}, & \ldots. & a_{m_{p-1}}; \\ a_{m_0+1}, & \ldots. & a_{m_{p-1}+1}; \\ \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots; \\ a_{m_0+p-1}, & \ldots. & a_{m_{p-1}+p-1}; \\ a_{m_0+p}, & \ldots, & a_{m_{p-1}+p}. \end{array} \right.$$

$\mathfrak{D}$ sera le plus grand déterminant déduit de ce tableau rectangulaire par la suppression d'une des lignes, soit la ligne de rang h.

Le nombre h ne pouvant avoir que $p+1$ valeurs, il est clair qu'on pourra toujours trouver des déterminants principaux à indices augmentant tous indéfiniment, et pour lesquels h ait la même valeur. Provisoirement, nous ne nous occuperons que de déterminants principaux choisis de cette façon, c'est-à-dire pour lesquels h aura une valeur déterminée, la même pour tous.

Le mineur de $\mathfrak{D}$ relatif à l'élément a_{m_i+k}, pris dans la colonne correspondant à l'indice m_i, sera encore désigné par la notation $\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial(i,k)}$.

Le déterminant $\mathfrak{D}$ *jouira de la même propriété que le déterminant* $\Delta^{(p-1)}$, et l'on aura aussi

$$(40) \quad \frac{\mathfrak{D}}{\left[\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial(i,k)}\right]} = \frac{1}{\theta}\mathrm{M}_i^{\omega-\varepsilon} (i=0,\ldots,p-1;\ k=0,1,2,\ldots,h-1,h+1,\ldots,p)$$

Considérons, en effet, l'un des mineurs $\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial(i,k)}$, que nous pouvons supposer différent de o, sans quoi le quotient correspondant serait infini, ce qui est une manière de vérifier l'inégalité (40). Nous pouvons déterminer des paramètres λ_j (j prenant toutes les valeurs de o à

p, les valeurs h et k exceptées) par les $p-1$ équations

$$(41)\quad \begin{cases} \sum \lambda_j a_{m_0+j} = a_{m_0+k}, \\ \sum \lambda_j a_{m_1+j} = a_{m_1+k}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum \lambda_j a_{m_{i-1}+j} = a_{m_{i-1}+k}, \\ \sum \lambda_j a_{m_{i+1}+j} = a_{m_{i+1}+k}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum \lambda_j a_{m_{p-1}+j} = a_{m_{p-1}+k}, \end{cases}$$

et, si Q désigne le quotient $\dfrac{\omega}{\left[\dfrac{\partial\omega}{\partial(i,k)}\right]}$, on aura

$$(42)\qquad \sum \lambda_j a_{m_i+j} = \mathrm{Q};$$

mais d'autre part, ω étant différent de o, on peut déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_p$ par les p équations

$$(43)\quad \begin{cases} a_{m_0+h} = \alpha_0 a_{m_0} + \alpha_1 a_{m_0+1} \dots + \alpha_{h-1} a_{m_0+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_0+h+1} + \dots + \alpha_p a_{m_0+p}, \\ a_{m_1+h} = \alpha_0 a_{m_1} + \alpha_1 a_{m_1+1} \dots + \alpha_{h-1} a_{m_1+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_1+h+1} + \dots + \alpha_p a_{m_1+p}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m_i+h} = \alpha_0 a_{m_i} + \alpha_1 a_{m_i+1} \dots + \alpha_{h-1} a_{m_i+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_i+h+1} + \dots + \alpha_p a_{m_i+p}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m_{p-1}+h} = \alpha_0 a_{m_{p-1}} + \alpha_1 a_{m_{p-1}+1} \dots + \alpha_{h-1} a_{m_{p-1}+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_{p-1}+h+1} + \dots + \alpha_p a_{m_{p-1}+p}; \end{cases}$$

et même, à cause des hypothèses faites sur le déterminant ω, tous les coefficients α seront plus petits que 1 en valeur absolue. Le coefficient α_p est d'ailleurs différent de o, sans quoi le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ serait nul ; en sorte que nous pouvons résoudre les équations (43) par rapport à $a_{m_0+p}, a_{m_1+p}, \dots, a_{m_{p-1}+p}$ respectivement. Ces valeurs, transportées

dans les équations (41) et (42), donnent les relations

$$(44)\quad \begin{cases} \mu_0 a_{m_0} + \mu_1 a_{m_0+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_0+p-1} = 0, \\ \mu_0 a_{m_1} + \mu_1 a_{m_1+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_1+p-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_0 a_{m_{i-1}} + \mu_1 a_{m_{i-1}+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_{i-1}+p-1} = 0, \\ \mu_0 a_{m_i} + \mu_1 a_{m_i+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_i+p-1} = Q, \\ \mu_0 a_{m_{i+1}} + \mu_1 a_{m_{i+1}+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_{i+1}+p-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_0 a_{m_{p-1}} + \mu_1 a_{m_{p-1}+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_{p-1}+p-1} = 0. \end{cases}$$

Les coefficients μ_h et μ_k, ayant respectivement pour valeurs

$$\mu_h = \frac{\lambda_p}{\alpha_p}, \qquad \mu_k = -1 - \frac{\lambda_p}{\alpha_p}\alpha_k,$$

sont liés par la relation

$$(45)\qquad \mu_k + \alpha_k \mu_h = -1;$$

d'où résulte que l'un au moins de ces coefficients μ_h et μ_k est supérieur à $\frac{1}{2}$, puisque α_k est plus petit que 1. Or les deux quotients $\dfrac{\Delta^{(p-1)}}{\left[\dfrac{\partial\Delta^{(p-1)}}{\partial(i,h)}\right]}$ et $\dfrac{\Delta^{(p-1)}}{\left[\dfrac{\partial\Delta^{(p-1)}}{\partial(i,k)}\right]}$, égaux respectivement, d'après les équations (44), à $\dfrac{Q}{\mu_h}$ et $\dfrac{Q}{\mu_k}$, sont supérieurs à $M_i^{\omega-\varepsilon}$. Il en est donc de même pour Q, ainsi que nous l'avions annoncé.

27. Cela posé, au tableau rectangulaire (39), adjoignons une dernière colonne composée des éléments

$$a_{m_p}, \quad a_{m_p+1}, \quad \ldots, \quad a_{m_p+p},$$

m_p désignant un indice très grand, mais plus petit que chacun des indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$. Nous obtenons un déterminant $\Delta^{(p)}_{m_0, m_1, \ldots, m_p}$. Par hypothèse,

ce déterminant contient un mineur $\frac{\partial \Delta^{p}}{\partial(i, k)}$ tel que le quotient $\frac{\Delta^{(p)}}{\left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}\right|}$ soit plus petit que $M_i^{\omega'+\varepsilon}$.

Si d'abord i est égal à p, on peut supposer, d'après la manière dont nous avons formé le déterminant ϖ, que le mineur en question n'est autre que ϖ.

Supposons maintenant que i soit différent de p. On peut d'abord prendre $k = h$; car, si k est différent de h, l'identité bien connue entre les mineurs d'un déterminant nous donne

$$\varpi \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)} - \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(p, k)} \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)} = \Delta^{(p)} \frac{\partial \varpi}{\partial(i, k)},$$

égalité dans laquelle les remarques précédentes permettent de remplacer $\Delta^{(p)}$, $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(p, k)}$, $\frac{\partial \varpi}{\partial(i, k)}$ respectivement par $0 \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)} M_i^{\omega'+\varepsilon}$, 0ϖ, $\frac{0\varpi}{M_i^{\omega-\varepsilon}}$, ce qui conduit à

$$\left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}\right| > \left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}\right| \left(1 - \frac{1}{M_i^{\omega-\omega'+\varepsilon}}\right) > \left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}\right| (1 - \varepsilon).$$

Nous pouvons donc substituer le mineur $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}$ au mineur $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}$.

Mais au mineur $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}$ on peut substituer le déterminant ϖ. En effet, l'élément a_{m_p} peut se mettre sous la forme $0 M_p^{\omega+\varepsilon}$, et l'on peut écrire sous cette même forme les coefficients $a_{m_p+1}, \ldots, a_{m_p+p}$, à cause des hypothèses faites sur la fonction $\varphi(m)$. Le déterminant $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}$ étant égal à

$$\frac{\partial \varpi}{\partial(i, 0)} a_{m_p} + \frac{\partial \varpi}{\partial(i, 1)} a_{m_p+1} + \ldots + \frac{\partial \varpi}{\partial(i, h-1)} a_{m_p+h-1}$$
$$+ \frac{\partial \varpi}{\partial(i, h+1)} a_{m_p+h+1} + \ldots + \frac{\partial \varpi}{\partial(i, p)} a_{m_p+p},$$

il existe au moins un indice j tel que $\left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}\right|$ soit moindre que $\left|\frac{\partial \varpi}{\partial(i, j)}\right| M_p^{\omega+\varepsilon}$. Or ϖ est supérieur à $\frac{\partial \varpi}{\partial(i, j)} M_i^{\omega-\varepsilon}$. On a donc

$$|\varpi| > \left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}\right| \frac{M_i^{\omega-\varepsilon}}{M_p^{\omega+\varepsilon}},$$

et cette inégalité, comparée à l'hypothèse

$$\left|\Delta^{(p)}\right| < \left|\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,h)}\right| M_i^{\omega'+\varepsilon},$$

nous donne

$$\left|\frac{\Delta^{(p)}}{\omega}\right| < \frac{M_p^{\omega+\varepsilon}}{M_i^{\omega-\omega'-\varepsilon}},$$

d'où, *a fortiori*,

$$(46) \qquad \left|\frac{\Delta^{(p)}}{\omega}\right| < M_p^{\omega'+\varepsilon},$$

puisque nous avons supposé m_i plus grand que m_p, et par suite M_i plus grand que M_p.

En un mot, on peut toujours supposer que le mineur $\dfrac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$ n'est autre que ω.

Si nous envisageons le système des paramètres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_p$, définis par les équations (43), cette inégalité (46) montre que, pour tout indice n plus petit que chacun des entiers $m_0, \ldots, m_{p-1}$, on a

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \ldots + \alpha_{h-1} a_{n+h-1} \\ &\qquad + \alpha_{h+1} a_{n+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{n+p} - a_{n+h} = 0\, N^{\omega'+\varepsilon}. \end{aligned} \right.$$

28. Soit, à présent, un second déterminant principal $\Delta^{(p-1)}_{n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}}$, les indices $n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}$ étant tous très grands, mais cependant inférieurs aux indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$. A ce déterminant $\Delta^{(p-1)}_{n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}}$ correspond un déterminant ω' se déduisant du nouveau déterminant $\Delta^{(p-1)}$ comme ω se déduisait de l'ancien, en faisant intervenir un indice h que nous supposerons être le même dans les deux cas, conformément à ce qui a été dit plus haut. On peut, avec cette nouvelle série d'indices, former un système d'équations analogues aux équations (43)

$$(43') \quad \left\{ \begin{aligned} a_{n_0+h} &= \alpha'_0 a_{n_0} + \alpha'_1 a_{n_0+1} + \ldots + \alpha'_{h-1} a_{n_0+h-1} \\ &\qquad + \alpha'_{h+1} a_{n_0+h+1} + \ldots + \alpha'_p a_{n_0+p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n_{p-1}+h} &= \alpha'_0 a_{n_{p-1}} + \alpha'_1 a_{n_{p-1}+1} + \ldots + \alpha'_{h-1} a_{n_{p-1}+h-1} \\ &\qquad + \alpha'_{h+1} a_{n_{p-1}+h+1} + \ldots + \alpha'_p a_{n_{p-1}+p}. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant, dans l'équation (47), nous remplaçons n successivement par $n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}$, nous obtenons p nouvelles équations que le système (43′) permet de mettre sous la forme

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_0 - \alpha'_0)a_{n_0} + (\alpha_1 - \alpha'_1)a_{n_0+1} + \ldots \\ \quad + (\alpha_{h-1} - \alpha'_{h-1})a_{n_0+h-1} + (\alpha_{h+1} - \alpha'_{h+1})a_{n_0+h+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + (\alpha_p - \alpha'_p)a_{n_0+p} = 0\,\mathrm{N}_0^{\omega'+\varepsilon}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_0 - \alpha'_0)a_{n_{p-1}} + (\alpha_1 - \alpha'_1)a_{n_{p-1}+1} + \ldots \\ \quad + (\alpha_{h-1} - \alpha'_{h-1})a_{n_{p-1}+h-1} + (\alpha_{h+1} - \alpha_{h+1})a_{n_{p-1}+h+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + (\alpha_p - \alpha'_p)a_{n_{p-1}+p} = 0\,\mathrm{N}_{p-1}^{\omega'+\varepsilon}. \end{array}\right.$$

Résolvons ces équations par rapport à $\alpha_0 - \alpha'_0, \alpha_1 - \alpha'_1, \ldots, \alpha_p - \alpha'_p$: en ayant égard aux relations

$$\left|\frac{1}{\omega'}\frac{\partial\omega'}{\partial(i,k)}\right| = \frac{0}{\mathrm{N}_i^{\omega-\varepsilon}},$$

nous voyons que, si n_0 est le plus petit des entiers $n_0, \ldots, n_{p-1}$, on a, pour chaque valeur de λ,

$$(49)\qquad \alpha_\lambda - \alpha'_\lambda = \frac{0}{\mathrm{N}_0^{\omega-\omega'+\varepsilon}}.$$

Cette conclusion a été établie en supposant que tous les n sont plus petits que chacun des m. Mais elle subsiste pour tout système de valeurs suffisamment grandes des m et des n. Car on peut prendre un déterminant principal auxiliaire formé avec des indices plus grands à la fois que les m et que les n. Si $\alpha''_0, \ldots, \alpha''_{h-1}, \alpha''_{h+1}, \ldots, \alpha''_p$ désignant les quantités analogues aux α et aux α' calculées à l'aide de ce nouveau déterminant principal, l'équation (49), ayant lieu pour les différences $\alpha''_\lambda - \alpha_\lambda$ d'une part et $\alpha''_\lambda - \alpha'_\lambda$ d'autre part, est aussi vérifiée par $\alpha_\lambda - \alpha'_\lambda$.

Il en résulte que α_λ tend vers une limite quand les indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$ augmentent tous indéfiniment sans que le déterminant

$$\Delta^{(p-1)}_{m_0, m_1, \ldots m_{p-1}}$$

cesse d'être un déterminant principal.

La limite de α_λ étant désignée par $-A^{(p-\lambda)}$, on a, pour n très grand, la relation

$$(50) \qquad A^{(p)} a_n + A^{(p-1)} a_{n+1} + \ldots + A^{(0)} a_{n+p} + a_{n+h} = \theta N^{\omega'+\varepsilon},$$

car la quantité $N^{\omega'+\varepsilon}$, étant supérieure à

$$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \ldots + \alpha_p a_{n+p} + a_{n+h}$$

d'après la formule (47), est aussi supérieure à sa limite.

On en conclut tout d'abord que $A^{(0)}$ n'est pas nul, sans quoi, en raisonnant sur la formule (50) comme nous avons raisonné au n° 25 sur la formule (37), on démontrerait pour le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ une conclusion analogue à celle que nous y avons établie pour le déterminant $\Delta^{(p)}$, ce qui serait contraire à nos hypothèses. Le rapport $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\mathfrak{D}}$ tend donc vers une limite finie et différente de 0, et, par conséquent, la relation (46) subsiste en y remplaçant $\mathfrak{D}$ par $\Delta^{(p-1)}$. Comme toutes les propriétés précédentes découlent de cette relation combinée avec la formule (40), on peut substituer, dans les considérations que nous venons de développer, le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ au déterminant $\mathfrak{D}$, et supposer $h = p$. Dans ces conditions, la relation (50) devient

$$A^{(p)} a_n + A^{(p-1)} a_{n+1} + \ldots + A^{(1)} a_{n+p-1} + a_{n+p} = \theta N^{\omega'+\varepsilon}.$$

Cette relation n'étant autre que la relation (37), nous avons démontré que *la condition nécessaire trouvée au n° 25 est aussi suffisante.*

Pour obtenir les coefficients A, on voit qu'il faut choisir des déterminants principaux à indices de plus en plus élevés et résoudre les équations (43) correspondantes.

Nous nous étions bornés aux déterminants principaux pour lesquels l'indice h avait la même valeur; mais cette restriction n'a plus de raison d'être, puisque nous avons vu qu'on peut toujours supposer $h = p$.

En prenant comme valeurs approchées les quantités α calculées à l'aide d'un déterminant principal quelconque, on commet sur

chaque coefficient une erreur moindre que $\frac{1}{M_0^{\omega-\omega'-\varepsilon}}$, si m_0 est le plus petit des indices qui servent à former le déterminant principal.

Dans le cas où le nombre p est égal à 1, les déterminants $\Delta^{(p-1)}$ se réduisent aux coefficients a_m eux-mêmes. Si l'on écrit le polynôme Φ sous la forme $\Phi = 1 - \frac{x}{x_1}$, on voit que x_0 est la limite de $\frac{a_m}{a_{m+1}}$, mais en se bornant aux valeurs principales de a_m, c'est-à-dire à celles pour lesquelles le rapport $\frac{\mathrm{L}|a_m|}{\mathrm{LM}}$ est très voisin de ω. Si l'on ne prenait pas cette précaution, on pourrait ne plus arriver au résultat cherché, ainsi que nous le constaterons sur un exemple.

Dans le cas simple par lequel nous avons commencé et qui correspond à l'hypothèse $\varphi(m) = c^m$, cette difficulté ne se présentait pas ; nous avons vu que tous les déterminants $\Delta^{(p-1)}$ à indices consécutifs étaient des déterminants principaux.

29. Les paramètres μ et α peuvent s'exprimer par des quotients de déterminants. On a déjà, en effet,

$$Q = \frac{\omega}{\left|\frac{\partial\omega}{\partial(i,k)}\right|}, \qquad \mu_h = \frac{Q}{\Delta^{(p-1)}}\,\frac{\partial\Delta^{(p-1)}}{\partial(i,h)}, \qquad \mu_k = \frac{Q}{\Delta^{(p-1)}}\,\frac{\partial\Delta^{(p-1)}}{\partial(i,k)},$$

et la résolution des équations (43) donne la valeur de α_k.

Ces expressions, reportées dans l'égalité (45), donnent une relation qui peut s'énoncer, d'une façon générale, sous la forme suivante :

Soit donné un tableau rectangulaire

$$(51)\qquad \begin{cases} a_1, & b_1, & \ldots, & l_1, \\ a_2, & b_2, & \ldots, & l_2, \\ a_3, & b_3, & \ldots, & l_3, \\ \ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p+1}, & b_{p+1}, & \ldots, & l_{p+1}; \end{cases}$$

comprenant p colonnes et $p+1$ lignes. En supprimant la première

ligne, on forme un déterminant d'ordre p :

$$\Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}.$$

En supprimant la seconde ligne, on forme de même le déterminant

$$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & \dots & l_3 \\ a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_4 & b_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix},$$

où nous avons interverti les lignes de façon que le déterminant $\Delta_{3,1}$ se déduise du déterminant $\Delta_{2,3}$ par une permutation circulaire effectuée entre les lignes première, seconde et troisième du tableau (51). Enfin la suppression de la troisième ligne fournit pareillement le déterminant

$$\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ a_4 & b_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}.$$

Supprimons maintenant la deuxième et la troisième ligne, en même temps que la première colonne; puis la troisième et la première ligne; puis les deux premières; nous obtenons les trois déterminants d'ordre $p-1$

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ b_4 & c_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix},$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ b_4 & c_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix},$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ b_4 & c_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, on aura

$$\Delta_{2,3}\,\delta_1 + \Delta_{3,1}\,\delta_2 + \Delta_{1,2}\,\delta_3 = 0.$$

Ce fait peut se ramener à un autre bien connu, en mettant à gauche du tableau (51) une colonne formée tout entière de zéros, à l'exception du troisième élément qui sera égal à 1. On obtient ainsi un déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & \dots & l_3 \\ 0 & a_4 & \dots & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}$$

égal à $\Delta_{1,2}$. Les mineurs relatifs aux deux premiers éléments nuls sont respectivement $\Delta_{2,3}$ et $\Delta_{3,1}$, tandis que les mineurs correspondant aux éléments a_1 et a_2 sont δ_2 et $-\delta_1$. Entre ces quatre mineurs existe bien la relation

$$-\Delta_{2,3}\,\delta_1 - \Delta_{3,1}\,\delta_2 = \Delta_{1,2}\,\delta_3,$$

car la suppression des deux premières lignes et des deux premières colonnes donne le déterminant δ_3.

50. On peut étendre la relation précédente à une substitution circulaire de $n+1$ lettres, n étant un entier quelconque au plus égal à p. Dans ce cas, il faudra, pour former le déterminant Δ, supprimer la $n+1^{\text{ième}}$ ligne, et, pour obtenir le déterminant δ, supprimer les n

premières lignes en même temps que les $n - 1$ premières colonnes du tableau (51). La somme des valeurs que prend le produit $\Delta \delta$, lorsqu'on permute circulairement les $n + 1$ premières lignes du tableau (51), est encore nulle si n est pair. Lorsque n est impair, il faut, pour obtenir une somme nulle, faire précéder les termes alternativement du signe $+$ et du signe $-$. En un mot, dans tous les cas, on multipliera chaque valeur par $+1$ ou par -1 suivant que la substitution qui a servi à l'obtenir appartient ou non au groupe alterné, et la somme

$$
\begin{aligned}
S_{n,p} = & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & \ldots & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & \ldots & \ldots & l_n \\ a_{n+2} & \ldots & \ldots & l_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+1} & \ldots & \ldots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{n+1} & \ldots & l_{n+1} \\ h_{n+2} & \ldots & l_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{p+1} & \ldots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \ldots \\
& + (-1)^{\mu n} \begin{vmatrix} a_{n-\mu+2} & \ldots & l_{n-\mu+2} \\ a_{n-\mu+3} & \ldots & l_{n-\mu+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1} & \ldots & l_{n+1} \\ a_1 & \ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-\mu} & \ldots & l_{n-\mu} \\ a_{n+2} & \ldots & l_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+1} & \ldots & l_{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{n-\mu+1} & \ldots & l_{n-\mu+1} \\ h_{n+2} & \ldots & l_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{p+1} & \ldots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \ldots \\
& + (-1)^{n} \begin{vmatrix} a_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1} & \ldots & l_{n+1} \\ a_{n+2} & \ldots & l_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+1} & \ldots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_1 & \ldots & l_1 \\ h_{n+2} & \ldots & l_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{p+1} & \ldots & l_{p+1} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

sera identiquement nulle.

Tout d'abord ceci a lieu pour $n = 2$, ainsi que nous venons de le voir. Pour $p = n$, le déterminant δ se réduit à un seul élément, et il vient

$$S_{n,n} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & l_n \end{vmatrix} l_{n+1} + (-1)^n \begin{vmatrix} a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & \dots & l_{n-1} \end{vmatrix} l_n$$

$$+ \begin{vmatrix} a_n & \dots & l_n \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & \dots & l_{n-2} \end{vmatrix} l_{n-1} + \dots = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & l_1 & l_1 \\ a_2 & \dots & l_2 & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} & l_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, si l'on veut démontrer notre proposition pour certaines valeurs de n et de p, on peut la supposer établie, d'une part pour les sommes $S_{n,p-1}$, d'autre part pour les sommes $S_{n-1,p-1}$.

Or la somme $S_{n,p}$ est une fonction linéaire et homogène de $a_1, \dots, a_{p+1}$.

a_1 est multiplié par la somme

$$\begin{vmatrix} b_2 & \dots & l_2 \\ b_3 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & l_n \\ b_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}$$

$$-(-1)^n \begin{vmatrix} b_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & \dots & l_{n-1} \\ b_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_n & \dots & l_n \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \dots,$$

qui est précisément une somme $S_{n-1,p-1}$; et il en est de même pour $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$.

Considérons maintenant un élément a dont l'indice soit supérieur à $n+1$, soit a_{p+1} par exemple. Pour avoir le coefficient de a_{p+1}, il faudra supprimer la dernière ligne et la première colonne dans le déterminant Δ et dans ses transformés. La dernière ligne du tableau (51) continuera à être représentée par les éléments $h_{p+1}, \ldots, l_{p+1}$ qui figurent dans le déterminant δ. On pourra développer encore par rapport à ces derniers éléments et l'on trouvera, pour le coefficient de chacun d'eux, une somme $S_{n,p-1}$.

Ces différents coefficients pouvant être supposés nuls, ainsi qu'il a été remarqué précédemment, il en est de même pour $S_{n,p}$, comme nous voulions le démontrer.

On pourrait même aller plus loin et, au lieu d'opérer simplement la substitution circulaire précédente, effectuer successivement toutes les substitutions d'un groupe de degré $n+1$ contenant cette substitution. La somme des valeurs du produit $\Delta\delta$, précédées chacune du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la substitution correspondante serait ou non alternée, s'annulerait toujours. Car, si Γ désigne le groupe formé par les puissances de notre substitution circulaire, on sait que les substitutions du groupe donné seront données par un tableau de la forme

$$\Gamma, \quad T_1\Gamma, \quad T_2\Gamma, \quad \ldots, \quad T_{r-1}\Gamma,$$

où $1, T_1, \ldots, T_{r-1}$ désignent r substitutions. Or, en appliquant à notre produit $\Delta\delta$ les substitutions $T_1\Gamma$, on obtient la transformée de $S_{n,p}$ par la substitution T (multipliée par $+1$ ou -1 suivant que T_1 est alternée ou non), et ainsi des autres. Ces différentes transformées étant nulles, puisque l'égalité $S_{n,p} = 0$ est une identité, notre conclusion est établie. Par exemple, la somme considérée sera nulle pour tout groupe transitif de degré premier, car un pareil groupe contient toujours une substitution circulaire.

Enfin, au lieu du déterminant δ, on peut considérer un déterminant Δ' obtenu, non plus en supprimant $n-1$ colonnes du tableau (51), mais en lui laissant toutes ses colonnes et lui ajoutant $n-1$ lignes composées d'éléments arbitraires. Car ce déterminant est égal à une

somme de déterminants δ multipliés par des coefficients qui ne dépendent que des lignes ajoutées et, par suite, les conclusions obtenues pour le produit $\Delta\delta$ s'appliquent au produit $\Delta\Delta'$.

TROISIÈME PARTIE.

51. Dans cette troisième Partie, nous considérerons une série dont nous supposerons le rayon de convergence ramené à l'unité par la transformation (4), et nous rechercherons comment la nature des singularités est liée à l'ordre de grandeur des coefficients. C'est la marche qu'a suivie M. Darboux, dans le Mémoire précédemment cité *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*, en supposant d'abord que la fonction considérée admette, autour de chaque point singulier x_0, une partie principale de la forme $\frac{A}{(x-x_0)^\alpha}$, où α désigne un nombre compris entre 0 et 1. Il a étendu les résultats obtenus au cas de α quelconque, en partant des relations qui existent entre les coefficients d'une série et ceux des séries dérivées.

Pour appliquer des considérations analogues à des fonctions aussi générales que possible, nous utiliserons la notion de dérivée généralisée, telle que l'a présentée Riemann dans son Mémoire intitulé *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation* (¹).

Conformément aux conclusions de ce Mémoire (²), α étant un nombre quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, mais auquel nous ne donnerons cependant que des valeurs réelles, nous désignerons par le symbole $D_x^\alpha f(x)$ une fonction définie de la façon suivante :

1° Pour $\alpha = 0$

$$D_x^0 f(x) = f(x). \tag{52}$$

(¹) RIEMANN, *Œuvres complètes, Ed. Weber et Dedekind*, p. 331-344.

(²) Riemann introduit dans l'expression de $D_x^\alpha f(x)$ certains polynômes arbitraires que nous supprimons ici, parce qu'ils sont inutiles pour notre objet.

2° Si α est négatif, on prendra

$$(53)\qquad D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_k^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz,$$

l'intégration étant effectuée suivant un chemin rectiligne et k désignant un nombre tel que la fonction donnée soit régulière entre k et x. Dans l'étude actuelle, toutes les fonctions que nous considérerons étant régulières autour de l'origine, nous prendrons $k = 0$.

Au reste, il convient de remarquer que les intégrales

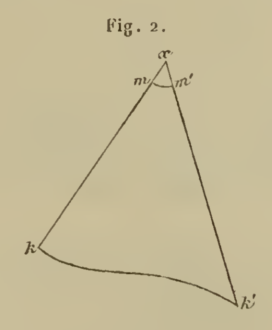
$$\int_k^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz \quad \text{et} \quad \int_{k'}^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz$$

se comportent de la même façon au point de vue des singularités [1], ce qui est pour nous le plus important.

---

[1] Soient, en effet, J et J' les deux intégrales en question, prises pour un point ordinaire x de la fonction. Joignons (*fig.* 2) les points k et k' par un chemin quelconque ne passant pas par le point x et ne coupant aucune des droites kx

Fig. 2.



et $k'x$. Enfin, du point x comme centre, décrivons entre ces deux mêmes droites un petit arc de cercle mm'. Nous formons ainsi un contour $k\,m\,m'\,k'\,k$ le long duquel l'intégrale de $(x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz$ sera nulle si les points k, k', x ont été pris intérieurs au cercle de convergence. L'intégrale suivant mm' étant infiniment petite avec le rayon du cercle, on voit que la différence entre les intégrales J et J' est égale à l'intégrale $\int_k^{k'} (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz$, laquelle est holomorphe, excepté sur le chemin kk'.

3° Si α est positif, E désignant le plus petit entier qui comprend α, on calculera, d'après les formules (52) ou (53) la fonction $D_x^{\alpha-E} f(x)$, et l'on en prendra la dérivée d'ordre E à la façon ordinaire.

Si $f(x)$ est développée en série de la forme

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

il est facile d'obtenir le développement de $D_x^\alpha f(x)$. Il suffit de partir des formules données par Riemann ([1]) pour la valeur de $D_x^\alpha x^m$. Nous écrirons de préférence le résultat obtenu sous la forme

$$(54) \qquad x^\alpha D_x^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^m.$$

32. La formule qui donne $D_x^\alpha x^m$ a été trouvée par Riemann en effectuant dans l'intégrale

$$D_x^\alpha x^m = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-z)^{-\alpha-1} z^m dz$$

la transformation $z = tx$, ce qui donne

$$D_x^\alpha x^m = \frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha-1} t^m dt,$$

et il est à remarquer que, dans l'intégrale qui figure au second membre, on donne à $(1-t)^{-\alpha-1}$ sa valeur réelle et positive ; car c'est seulement à cette condition que cette intégrale est égale à $\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(m+1-\alpha)}$.

Si nous opérons la même transformation dans la formule (53), dans l'hypothèse $k = 0$, nous trouvons

$$(55) \qquad x^\alpha D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha-1} f(tx)\,dt.$$

On voit que cette nouvelle formule (55) a l'avantage de donner

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 343.

pour $x^\alpha D_x^\alpha f(x)$ une valeur parfaitement déterminée, puisque $(1-t)^{-\alpha-1}$ devra recevoir sa détermination réelle et positive.

55. Si nous posons $x = e^y$ et que nous formions le symbole D en considérant f comme fonction de y, nous obtenons une nouvelle expression, que nous désignons par la notation $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$.

L'intégrale (53) devient dans ces conditions

$$(56) \qquad \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_k^x (\mathrm{L}x - \mathrm{L}z)^{-\alpha-1} f(z)\, d\,\mathrm{L}z.$$

Nous supposerons la fonction f privée de son terme constant, autrement dit s'annulant à l'origine. L'intégrale précédente deviendra dès lors finie pour $k = 0$. En y posant $z = tx$, nous pourrons écrire, pour les valeurs négatives de α,

$$(57) \qquad \mathfrak{D}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1} f(tx)\frac{dt}{t}.$$

Dans tous les cas, le développement en série de $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$ sera le suivant

$$(58) \qquad \mathfrak{D}_x^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m m^\alpha.$$

Pour α négatif, ce développement résulte de la formule connue

$$\int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{t}\right)^{a-1} t^{m-1}\, dt = \frac{\Gamma(a)}{m^a}.$$

D'ailleurs, le développement de $\dfrac{df(x)}{d\,\mathrm{L}x} = xf'(x)$ se déduit bien de celui de $f(x)$ en multipliant le coefficient de x^m par m, d'où l'on conclut que le développement de $\dfrac{d^{\mathrm{E}}f(x)}{(d\mathrm{L}x)^{\mathrm{E}}}$ s'obtient en multipliant le coefficient de x^m par m^{E}. Le développement (58) est donc général.

De ce développement résulte que si f est développable en série autour de l'origine, on a toujours

$$\mathfrak{D}_x^\alpha \mathfrak{D}_x^\beta f(x) = \mathfrak{D}_x^{\alpha+\beta} f(x).$$

Nous remarquerons aussi qu'il n'existe qu'une seule fonction φ développable en série de Maclaurin et telle que $\mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x) = f(x)$: c'est la fonction

$$\varphi(x) = \mathcal{D}_x^{-\alpha} f(x).$$

54. Les développements (54) et (58) sont absolument convergents en même temps. Nous remarquerons, en effet, que le rapport des coefficients correspondants a pour limite 1.

Pour α entier et positif, ceci se reconnaît immédiatement, car la quantité $\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)}$ se réduit à un polynôme entier en m, de degré α.

Pour les valeurs de α non entières et positives, il suffit d'utiliser la valeur asymptotique de $\Gamma(m)$ pour m très grand ; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} &= e^{-\alpha}\frac{(m+1)^{m+\frac{1}{2}}}{(m+1-\alpha)^{m+\frac{1}{2}-\alpha}} \\ &= e^{-\alpha}(m+1)^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{m+1-\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}-\alpha}.\end{aligned}$$

Le dernier facteur a pour limite e^α et détruit ainsi le premier lorsque m devient infini, de sorte qu'il reste bien

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} = m^\alpha(1+\varepsilon).$$

55. Les expressions (55) et (57) conduisent à envisager les opérations $x^\alpha D_x^\alpha f(x)$ et $\mathcal{D}_x^\alpha f(x)$ comme des cas particuliers de la transformation

$$\varphi(x) = \int_0^1 V(t) f(tx)\,dt, \tag{59}$$

laquelle présente, au point de vue qui nous occupe actuellement, des propriétés intéressantes ([1]).

([1]) M. Pincherle (*Acta mathematica*, t. X, p. 153-182) a étudié la transformation $F(x) = \int \varphi(y) A(x, y) dy$. Mais il ne s'est pas placé au même point de vue

Convenons d'abord, pour fixer les idées, que l'intégrale soit prise suivant l'axe réel. Dans ce cas, la fonction $V(t)$ peut n'être définie que pour les valeurs réelles de t comprises entre o et 1. Il faudra seulement que l'intégrale $\int_0^1 |V(t)|\,dt$ ait une valeur finie M. Même, dans le cas où f s'annule pour $t = 0$, il suffira que l'intégrale $\int_0^1 |tV(t)|\,dt$ soit finie.

Donnons à x une valeur telle que la fonction donnée f soit régulière au point correspondant; que, de plus, la droite qui joint ce point à l'origine ne passe par aucun point singulier de f. Je dis que la nouvelle fonction φ sera régulière en ce point.

L'intégrale (59) donnera tout d'abord pour φ une valeur finie et déterminée. Si maintenant nous donnons à x un accroissement h, nous trouvons

$$\varphi(x+h) - \varphi x = \int_0^1 V(t)\,[f(tx+th) - f(tx)]\,dt.$$

Or on peut obtenir une expression de la quantité $f(tx+th) - f(tx)$ de la façon suivante. On a

$$f(tx+th) - f(tx) = \int_{tx}^{tx+th} f'(z)\,dz.$$

La fonction $f'(z)$ est, d'ailleurs, uniformément continue dans un triangle ayant pour sommet l'origine et comprenant le point x à son intérieur (*fig.* 3), de sorte que l'on peut, pour toute valeur de z située sur la droite qui joint le point tx au point $tx+th$, remplacer $f'(z)$ par $f'(tx) + \theta\varepsilon$, où θ est de module plus petit que 1 et ε un nombre que nous pouvons supposer aussi petit que nous le voulons,

---

que nous. Il considère cette expression « comme un algorithme appliqué au sujet variable $\varphi(y)$ et dont les propriétés essentielles dépendent de la fonction $A(x, y)$ ». C'est précisément, comme on le voit, l'inverse de ce qui est fait dans le texte.

si h est assez voisin de o, et cela indépendamment de la valeur donnée à t. Dans ces conditions, on a

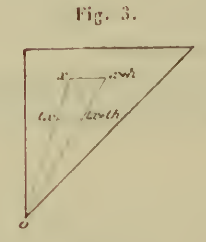
$$f(tx+th)-f(tx)=th[f'(tx)+\theta\varepsilon],$$

d'où

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\left[\int_0^1 t\mathrm{V}(t)f'(tx)dt+\theta\varepsilon\mathrm{M}\right].$$

La fonction φ a donc bien une dérivée et est, par suite, holomorphe au point considéré.

Fig. 3.



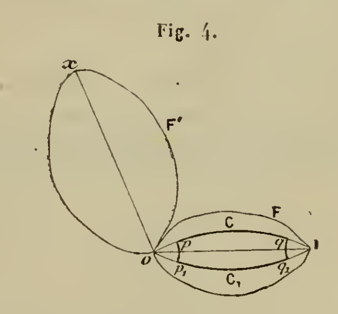
Les seules singularités de la fonction φ sont donc des coupures rectilignes tracées suivant les prolongements des droites qui joignent l'origine aux différents points singuliers de la fonction f.

36. Mais ces coupures elles-mêmes ne sont en général qu'apparentes et dues à la façon trop restreinte dont nous avons défini l'expression φ, en exigeant que l'intégration fût effectuée le long du chemin rectiligne. C'est un fait bien connu que les choses se passent tout autrement lorsqu'on conserve à la fonction toute sa généralité en laissant le chemin d'intégration indéterminé.

Soient tracées, par exemple, du point $x=0$ au point $x=1$, deux lignes quelconques situées de part et d'autre de l'axe réel (*fig.* 4), de façon à former un fuseau F. Supposons que la fonction $\mathrm{V}(t)$ soit holomorphe à l'intérieur de ce fuseau; supposons, de plus, que les produits $t\mathrm{V}(t)$ et $(1-t)\mathrm{V}(t)$ tendent vers o lorsque la variable t s'approche, par des chemins intérieurs au fuseau, de la valeur o pour le premier et de la valeur 1 pour le second, et cela de façon que l'intégrale $\int_0^1 |\mathrm{V}(t)||dt|$, prise le long d'une ligne rectifiable quelconque

intérieure au fuseau, soit finie ([1]). Même, si l'on se borne à considérer les fonctions f, qui s'annulent pour $x = 0$, il suffira que ces propriétés appartiennent à la fonction $t\mathrm{V}(t)$, c'est-à-dire que les produits $t^2\mathrm{V}(t)$,

Fig. 4.



$t\mathrm{V}(1-t)$ tendent vers o avec t et que l'intégrale $\int_0^1 |t\mathrm{V}(t)||dt|$ ait une valeur finie.

Sur la ligne $(0, x)$ comme base (*fig.* 4) décrivons un fuseau F' semblable à F. Il peut arriver que ce fuseau F' ne renferme aucun point singulier de la fonction donnée. En ce cas, nous voyons d'abord que les intégrales (59) prises suivant deux chemins différents C et C_1 à l'intérieur du fuseau F sont égales. Il suffit, pour s'en rendre compte, de décrire, des points o et 1 comme centres, deux petits arcs de cercle coupant les chemins C et C_1, l'un aux points p et p_1, l'autre aux points q et q_1. L'intégrale de la fonction $\mathrm{V}(t)f(tx)$ le long du contour fermé pqq_1p_1p étant nulle, la différence des intégrales (pq) et (p_1q_1) est égale à la différence des intégrales (pp_1) et (qq_1), lesquelles tendent vers o avec les rayons des cercles, à cause des hypothèses faites sur la fonction V.

Nous pourrons donc considérer exclusivement l'intégrale prise sui-

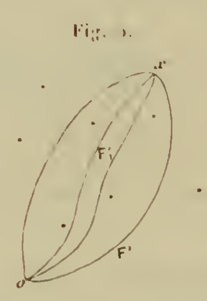
([1]) Ceci arrivera, par exemple, toutes les fois que la fonction V sera, aux environs de l'origine, plus petite que $\frac{1}{t^\alpha}$ et, aux environs du point $t = 1$, plus petite que $\frac{1}{(1-t)^\alpha}$, l'exposant α étant plus petit que 1. Du reste, il faut remarquer que le mot *finie* signifie ici : finie pour chaque intégrale. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait une limite supérieure commune à toutes.

vant le chemin rectiligne, et les raisonnements donnés ci-dessus s'appliqueront sans modification.

Supposons maintenant que x soit toujours l'affixe d'un point ordinaire pour la fonction $f(x)$, mais que le fuseau F′ renferme des points singuliers de cette fonction.

Si la fonction f n'a que des points singuliers formant une suite ponctuelle, on pourra, à l'intérieur du fuseau F′, tracer un fuseau F'_1 (*fig.* 5) compris entre deux lignes allant du point o au point x, et

Fig. 5.



ne renfermant pas de point singulier. Soit F_1 le fuseau intérieur au fuseau F et qui correspond au fuseau F'_1. Nous prendrons l'intégrale (59), non plus suivant le chemin rectiligne, mais suivant un chemin C intérieur au fuseau F_1 et nous pourrons refaire les raisonnements précédents en désignant, cette fois, par M l'intégrale $\int_C |V(t)|\,|dt|$ (ou, si f s'annule avec x, l'intégrale $\int_C |tV(t)|\,|dt|$). La fonction représentée par l'intégrale (59) prise le long du chemin C est donc holomorphe autour du point considéré.

Ainsi, d'après notre nouvelle définition, la fonction φ devient en général multiforme, puisque sa valeur dépend du fuseau F'_1; mais elle n'a plus d'autres points singuliers que ceux de la fonction f.

37. Lorsque f est une fonction régulière à l'intérieur d'un certain cercle, si l'on ne considère que les points singuliers situés sur ce cercle, il est évidemment indifférent de considérer la fonction dans sa définition restreinte, ou, au contraire, dans toute sa généralité.

Dans ces conditions, le développement de φ est lié à celui de f par

des relations particulièrement simples. Il est clair, en effet, que le coefficient de x^m dans le développement de φ s'obtiendra en multipliant le coefficient correspondant a_m de f par la quantité

$$(60)\qquad \mathfrak{S}_m = \int_0^1 \mathrm{V}(t)\, t^m\, dt.$$

On peut donc former, et cela d'une infinité de manières, des suites de nombres par lesquels on peut multiplier les coefficients successifs d'une série sans changer ses points singuliers.

Soit, par exemple,

$$\mathrm{V}(t) = \frac{1}{2it}\left[\frac{1}{\Gamma(1-i)}\left(\mathrm{L}\,\frac{1}{t}\right)^{-i} - \frac{1}{\Gamma(1+i)}\left(\mathrm{L}\,\frac{1}{t}\right)^{i}\right];$$

nous trouverons

$$\mathfrak{S}_m = \frac{m^{-1+i} - m^{-1-i}}{2i} = \frac{1}{m}\sin(\mathrm{L}m),$$

et, comme on peut, sans modifier les singularités, remplacer $f(x)$ par $xf'(x)$, nous pourrons prendre

$$(61)\qquad \mathfrak{S}_m = \sin(\mathrm{L}m).$$

58. Cette valeur de $\mathfrak{S}_m$ va nous servir à démontrer un fait annoncé dans la première Partie (nº **7**), à savoir que la série (2) peut admettre pour point singulier unique sur le cercle de convergence le point x_0, sans que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tende vers x_0. En effet, puisque la transformation précédente conserve les points singuliers, nous aurons manifestement fourni la démonstration demandée si nous établissons que le rapport $\frac{\mathfrak{S}_{m+1}}{\mathfrak{S}_m}$ ne tend pas vers la limite 1 lorsque m augmente indéfiniment.

Nous considérerons, à cet effet, le résidu minimum de $\mathrm{L}m$ par rapport à 2π, c'est-à-dire que nous poserons

$$\mathrm{L}m = 2k\pi + \psi,$$

k étant un entier et ψ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Il est facile de constater que ce résidu ψ pourra s'approcher autant

qu'on voudra d'un angle quelconque α. Car, si l'on prend k suffisamment grand, les quantités $e^{2k\pi+\alpha}$, $e^{2k\pi+\alpha+\varepsilon}$, dont la différence est égale au produit du nombre fixe $e^{\alpha+\varepsilon}-e^{\alpha}$ par le nombre très grand $e^{2k\pi}$, comprendront certainement un nombre entier, et même autant de nombres entiers qu'on le voudra.

En particulier, prenons $\alpha = 0$ et soient m et $m+1$ les deux entiers consécutifs qui comprennent le nombre $e^{2k\pi}$. Les valeurs de $\mathrm{L}m$ et de $\mathrm{L}(m+1)$ seront respectivement de la forme $e^{2k\pi-\varepsilon}$ ou $e^{2k\pi+\varepsilon}$, et par suite leurs sinus seront de signes contraires. La formule (61) donnera donc pour le rapport $\frac{\mathfrak{S}_{m+1}}{\mathfrak{S}_m}$ une valeur négative.

Envisageons maintenant le rapport $\frac{\mathfrak{S}_{m+2}}{\mathfrak{S}_{m+1}}$. D'après ce que nous savons sur $\mathrm{L}(m+1)$ et $\mathrm{L}(m+2)$, les sinus de ces deux quantités seront sensiblement égaux à $\mathrm{L}(m+1)-2k\pi$ et $\mathrm{L}(m+2)-2k\pi$. Or la quantité $\mathrm{L}\frac{m+2}{e^{2k\pi}}$ peut se remplacer elle-même, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, par $\frac{m+2}{e^{2k\pi}}-1$, et, de même, à $\mathrm{L}\frac{m+1}{e^{2k\pi}}$ on peut substituer $\frac{m+1}{e^{2k\pi}}-1$. Le rapport $\frac{\mathfrak{S}_{m+2}}{\mathfrak{S}_{m+1}}$ est donc infiniment peu différent de $\frac{m+2-e^{2k\pi}}{m+1-e^{2k\pi}}$, quantité évidemment supérieure à 2. De même, $\frac{\mathfrak{S}_{m+3}}{\mathfrak{S}_{m+2}}$ sera supérieur à $\frac{3}{2}-\varepsilon$, et ainsi de suite. Au contraire, $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{S}_{m-1}}$ pourra se remplacer par $\frac{e^{2k\pi}-m}{e^{2k\pi}-(m-1)}$, qui est plus petit que $\frac{1}{2}$, et l'on pourrait opérer d'une façon analogue pour $\frac{\mathfrak{S}_{m-1}}{\mathfrak{S}_{m-2}}$.

Ainsi nous voyons que ce rapport $\frac{\mathfrak{S}_{m+1}}{\mathfrak{S}_m}$ peut prendre, et cela aussi loin qu'on voudra dans la série, des valeurs plus grandes que $2-\varepsilon$, ou plus petites que $\frac{1}{2}+\varepsilon$, ou même négatives. Il est donc établi que ce rapport ne tend pas vers l'unité.

Si, par exemple, on part de la fonction $\frac{1}{1-x}=\Sigma x^m$, on en déduira par notre transformation la fonction

$$(62)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sin \mathrm{L}(m)\, x^m,$$

laquelle admettra pour point singulier unique le point $x = 1$, sans que le rapport de deux coefficients consécutifs ait pour limite l'unité.

On pourrait, il est vrai, objecter que la transformation (59), tout en n'introduisant aucun point singulier, peut avoir fait disparaître ceux qui existaient auparavant. Mais ici nous sommes assuré du contraire par la considération du cercle de convergence. Il résulte, en effet, de ce qui précède que $\sin Lm$ a une infinité de valeurs voisines de 1. Le rayon de convergence de la série (62) est donc égal à l'unité, et, par suite, la fonction qu'elle représente possède sur le cercle de rayon 1 un point singulier, lequel ne peut être, comme nous le savons, que le point $x = 1$.

39. Nous introduirons encore une notion préliminaire relative, celle-ci, aux fonctions continues et voisine de la notion connue de fonction à variation limitée.

Nous dirons qu'une fonction continue, réelle ou imaginaire, de la variable réelle x est *à écart fini* dans un intervalle (a, b), lorsque les intégrales $n\int \cos nx\, f(x)\, dx$ et $n\int \sin nx\, f(x)\, dx$, prises entre des limites quelconques intérieures à l'intervalle (a, b), restent finies et moindres en valeur absolue qu'une quantité fixe I lorsque n augmente indéfiniment. Cette quantité I sera dite l'*écart* de la fonction dans l'intervalle (a, b).

Une fonction à écart fini reste à écart fini lorsqu'on effectue un changement de variable tel que $x = \lambda x' + \mu$. Car cette transformation change les intégrales précédentes en d'autres qui en dépendent par des relations linéaires à coefficients finis.

Une fonction à variation limitée est nécessairement à écart fini. En particulier, une fonction est toujours à écart fini lorsqu'elle a une dérivée finie. En effet, soient a', b' deux nombres compris dans l'intervalle (a, b). Pour évaluer l'intégrale

$$\int_{a'}^{b'} n \cos nx\, f(x)\, dx = \int_{a'}^{b'} f(x)\, d(\sin nx),$$

nous décomposerons l'intervalle (a', b') en intervalles partiels dont chacun (les deux extrêmes exceptés) aille de $\frac{k\pi}{n}$ à $\frac{(k+1)\pi}{n}$. Dans cha-

cun de ces intervalles, nous pourrons remplacer f par $\mu_k + \theta\delta_k$, le nombre μ_k étant le minimum de f dans l'intervalle considéré, δ_k son oscillation, θ une quantité variable comprise entre 0 et 1. L'intégrale prise dans l'intervalle partiel se décompose donc en deux, dont l'une est nulle et l'autre plus petite en valeur absolue que δ_k. Pour les intervalles extrêmes, le minimum μ est infiniment voisin de $f(a')$ ou de $f(b')$; l'oscillation δ est infiniment petite, de sorte que l'intégrale est infiniment voisine de $f(a')\sin na'$ ou de $f(b')\sin nb'$. Notre intégrale totale est donc moindre en valeur absolue que

$$\sum \delta_k + |f(a')| + |f(b')|$$

et reste finie si la fonction donnée est à variation limitée.

On pourrait rechercher si l'inverse a nécessairement lieu, auquel cas la notion que nous introduisons se confondrait avec celle de fonction à variation limitée. En tout cas, elle est distincte de la notion de fonction continue, ce que nous constaterons sur la série (11) (1re Partie, n° **12**). M. Weierstrass a démontré que si, dans cette série, on fait $x = e^{i\theta}$, la partie réelle de l'expression ainsi obtenue est une fonction continue, mais non à variation limitée, de l'argument θ. Nous reconnaîtrons plus loin que cette fonction n'est pas non plus à écart fini.

En multipliant une fonction f à écart fini par une fonction continue ψ, qui varie toujours dans le même sens, on obtient encore une fonction à écart fini, et le nouvel écart est égal à l'ancien, multiplié par deux fois la plus grande valeur absolue que prenne le multiplicateur. C'est ce que l'on reconnaît en appliquant à l'intégrale

$$n\int \psi f \cos nx\,dx$$

le second théorème de la moyenne. Si la fonction ψ a un nombre fini de maxima et de minima, on obtiendra le nouvel écart en multipliant l'ancien par la plus grande valeur absolue de ψ et par le nombre des maxima et minima.

Une fonction est à écart fini pour une valeur de la variable, si l'on peut trouver un intervalle comprenant cette valeur et dans lequel la fonction soit à écart fini.

Lorsqu'une fonction n'est pas à écart fini dans un intervalle (a, b), c'est qu'il existe dans cet intervalle une ou plusieurs valeurs de x pour lesquelles la fonction n'est pas à écart fini. Ceci se voit à la manière ordinaire, en décomposant l'intervalle (a, b) en parties de plus en plus petites, de façon à former une double série de nombres tendant vers une limite commune.

Enfin, la notion d'écart se définit sans difficulté pour les fonctions de variable imaginaire. L'écart d'une fonction le long d'une portion de courbe donnée, de longueur l, sera l'écart de la même fonction considérée comme fonction de l'arc de cette courbe compté à partir de l'une des extrémités de la portion donnée et variant de 0 à l.

40. Cela posé, nous considérerons, ainsi que nous nous le sommes proposé, une fonction définie par la série (2), dont nous supposerons le rayon de convergence réduit à l'unité, et nous démontrerons tout d'abord la proposition suivante :

Si la série $\sum a_m$, *formée par les coefficients de la série* (2), *est absolument convergente, et de telle façon que* $m \mathrm{L} m a_m$ *tende vers* 0, *la fonction* $f(x)$ *sera finie, continue et à écart fini sur le cercle de convergence.*

Les deux premières parties se voient immédiatement, la série (2) étant, dans les conditions de l'énoncé, uniformément convergente à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle.

Pour démontrer la troisième, nous désignerons par θ l'argument de la variable x qui décrit le cercle de rayon 1, et, au lieu des intégrales $n\int_\alpha^\beta \cos n\theta f(e^{i\theta})d\theta$, $n\int_\alpha^\beta \sin n\theta f(e^{i\theta})d\theta$, nous considérerons, ce qui revient évidemment au même, les expressions $n\int_\alpha^\beta e^{ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta$, $n\int_\alpha^\beta e^{-ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta$. La série (2) étant uniformément convergente, nous pouvons remplacer f par son développement et intégrer terme à terme. On trouvera ainsi, pour la première intégrale, la valeur $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{n}{m+n} a_m [e^{(m+n)i\beta} - e^{(m+n)i\alpha}]$, quantité plus petite que $2\mathrm{S}$, si S dé-

signe la somme de la série $\sum |a_m|$. La seconde intégrale prendra la forme $\sum_{m+0}^{\infty} \frac{n}{m-n} a_m [e^{(m-n)i\beta} - e^{(m-n)i\alpha}]$, où il faudra seulement, si n est un entier, remplacer le terme correspondant à $m = n$ par $na_n(\alpha - \beta)$.

Ayant choisi un nombre fixe k plus petit que 1 et un nombre fixe K plus grand que 1, nous diviserons les termes de la série en cinq parties.

La première partie comprendra tous les termes dont le rang est moindre que kn. Pour chacun de ces termes, la quantité $\frac{n}{m-n}$ est, en valeur absolue, moindre que $\frac{1}{1-k}$, de sorte que la somme partielle ainsi obtenue a un module inférieur à $\frac{2S}{1-k}$.

Tout pareillement, une seconde partie sera formée des termes à indices plus grands que Kn. La quantité $\frac{n}{m-n}$ étant alors constamment moindre que $\frac{1}{K-1}$, cette seconde partie sera inférieure à $\frac{2S}{K-1}$.

Nous isolerons, pour en former un troisième groupe, les deux termes dont les indices n_0 et $n_0 + 1$ comprennent le nombre n, ou le terme de rang n, si n est entier. Dans ce dernier cas, le terme correspondant de notre intégrale, étant égal à $na_n(\alpha - \beta)$, est très petit si n est très grand. Il en est de même dans la première hypothèse; car le nombre $n - n_0$, par exemple, est plus petit que 1, et, d'autre part, comme on peut évidemment, sans changer les expressions que nous avons à considérer, augmenter α ou β de $2k\pi$, la différence $\alpha - \beta$ peut être supposée inférieure à π en valeur absolue. La quantité

$$e^{(n_0-n)i\beta} - e^{(n_0-n)i\alpha} = 2ie^{(n_0-n)i\frac{\alpha+\beta}{2}} \sin\frac{(n_0-n)(\alpha-\beta)}{2}$$

aura son module moindre que $(n - n_0)(\alpha - \beta)$, ce qui, en multipliant par $\frac{na_{n_0}}{n_0 - n}$, donne un produit moindre que $na_{n_0}(\alpha - \beta)$, et l'on arriverait à une conclusion analogue pour le terme de rang $n_0 + 1$.

Enfin, le quatrième groupe comprendra tout ce qui est intermédiaire entre le premier et le troisième; et le cinquième, les termes intermédiaires entre le troisième groupe et le deuxième. Les parties de nos

intégrales correspondant à ces deux groupes tendront vers o lorsque n augmentera indéfiniment. Soit, en effet, a_λ le plus grand coefficient qui fasse partie de l'un de ces groupes. Ce groupe donnera dans l'intégrale une partie moindre que $na_\lambda\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)$, où ν désigne le nombre des termes du groupe, lequel est, ainsi que λ, dans un rapport fini avec n. Or la quantité entre parenthèses est, comme l'on sait, de l'ordre de $L\nu$, et, par suite, le produit tend vers o; car nous avons supposé, en commençant, que $\lambda L\lambda . a_\lambda$ était nul pour λ infini. La seconde intégrale $\int_\alpha^\beta e^{-ni\theta} f(e^{i\theta})d\theta$ est donc finie comme la première et notre proposition est établie.

Nous obtenons, en outre, une expression de l'écart. Cet écart est de la forme $k_1 S + k_2 \mu$, où k_1 et k_2 sont des nombres finis, μ désignant la plus grande valeur de $m L m\,|a_m|$.

Réciproquement, si la fonction f est finie, continue et à écart fini sur le cercle de convergence, la série formée par ses coefficients sera absolument convergente, ou si elle ne l'est pas, elle le deviendra lorsqu'on remplacera $f(x)$ par $\varpi_x^{-\varepsilon} f(x)$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le voudra, et la convergence ayant lieu de telle façon que $m L m a_m$ tende vers o.

Pour démontrer cette réciproque, nous aurons recours aux expressions des coefficients sous forme d'intégrales définies

$$a_m = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)\,dz}{z^{m+1}},$$

l'intégrale étant prise suivant un cercle intérieur au cercle de convergence.

Tout d'abord, puisque la fonction donnée est finie et continue et par suite, comme on sait, uniformément continue à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle, on peut prendre l'intégrale sur le cercle même, la différence des intégrales prises sur les circonférences de rayons 1 et 1 − ε étant infiniment petite avec ε. On a ainsi

$$2i\pi a_m = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-(m+1)i\theta}\,d\theta.$$

Or cette intégrale, si nous supposons la fonction à écart fini, est au plus de l'ordre de $\frac{1}{m}$. Si nous la multiplions par $\frac{1}{m^\varepsilon}$, ce qui revient à remplacer $f(x)$ par $\varpi_x^{-\varepsilon} f(x)$, elle deviendra le terme général d'une série absolument convergente dans les conditions indiquées.

Si l'on considère, par exemple, la série

$$(11) \qquad 1 + bx^c + \ldots + b^\nu x^{c^\nu} + \ldots,$$

dont il a été question précédemment, on voit que, si $|bc| > 1$, le module de a_m ne devient pas constamment plus petit que $\frac{1}{m}$, puisque, pour $m = c^\nu$, on a $ma_m = (bc)^\nu$. La fonction représentée par cette série n'est donc pas à écart fini sur le cercle de convergence. Elle ne l'est même sur aucun arc de ce cercle, sans quoi nous pourrions raisonner comme au n° **12** (première Partie) et montrer qu'elle serait également à écart fini sur tous les arcs se déduisant du premier par des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{c^h}$, lesquels, si petit que soit l'arc donné, recouvriront par leur ensemble la circonférence entière si h a été pris suffisamment grand.

De ceci nous pouvons également conclure que la fonction considérée, pour $|bc| > 1$, est à variation illimitée sur tout arc de cette circonférence, allant ainsi un peu plus loin que M. Weierstrass, lequel n'avait établi le fait que pour $|bc| > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

41. Des théorèmes précédents résulte que si f est finie, continue et à écart fini sur le cercle de convergence, il en est de même de toutes les fonctions $\varpi_x^{-\alpha} f$ (où $\alpha > 0$).

Nous nommerons *ordre* de la fonction sur un arc du cercle de convergence le plus petit [1] nombre ω tel que $\varpi_x^{-\omega} f(x)$ soit, sur cet arc, fini, continu et à écart fini, ou le plus grand nombre tel que $\varpi_x^{-\omega} f(x)$ ne remplisse point ces conditions; en un mot, un nombre tel que $\varpi_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$ soit fini, continu et à écart fini, quel que soit le nombre

(1) Ce mot est pris dans son sens algébrique; il n'est pas relatif à la valeur absolue.

positif ε, mais que l'une de ces propriétés fasse défaut à $\mathcal{D}_x^{-\omega+\varepsilon} f(x)$. Le nombre ω sera ainsi défini dans tous les cas; il pourra se faire qu'il soit égal à $\pm\infty$.

La somme de deux fonctions d'ordre ω est d'ordre au plus égal à ω; la somme de deux fonctions, l'une d'ordre ω, l'autre d'ordre moindre, est nécessairement d'ordre ω.

Si maintenant nous faisons intervenir les théorèmes que nous venons de démontrer, nous arrivons à cette nouvelle définition de l'ordre :

L'ordre d'une fonction f le long de son cercle de convergence est égal à la limite supérieure, pour m infini, de $\frac{\mathrm{L}|a_m|}{\mathrm{L}m}$, *augmentée d'une unité.*

Soit, en effet, $\omega - 1$ cette limite supérieure. On aura, à partir d'une valeur de m suffisamment grande,

$$|a_m| < m^{\omega+\frac{\varepsilon}{2}-1},$$

et, par suite, la fonction $\mathcal{D}_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$ satisfera aux conditions du nº **40**.

Au contraire, il existera une infinité de termes tels que le coefficient a_m soit supérieur à $m^{\omega-\varepsilon-1}$. La fonction $\mathcal{D}_x^{-\omega+\varepsilon} f(x)$ ne peut donc pas être finie, continue et à écart fini sur le cercle.

42. De la même façon que nous avons défini l'ordre sur un arc du cercle, nous pouvons définir l'ordre en un point x_0 de ce cercle : ce sera un nombre ω tel que $\mathcal{D}_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$ soit fini, continu et à écart fini autour du point x_0, mais non $\mathcal{D}_x^{-\omega+\varepsilon} f(x)$.

Les seuls points pour lesquels il y ait lieu de considérer l'ordre sont les points singuliers; en un point ordinaire l'ordre est manifestement égal à $-\infty$.

A la définition précédente on peut évidemment substituer celle-ci : une fonction sera d'ordre ω au point x_0 s'il existe un arc comprenant ce point et sur lequel la fonction soit d'ordre ω.

Une fonction d'ordre ω sur un arc quelconque présente sur cet arc au moins un point d'ordre ω, ainsi qu'on le reconnaît encore par le procédé qui consiste à diviser l'arc en parties de plus en plus petites.

La réciproque (¹) étant évidemment vraie, on peut énoncer la proposition suivante :

L'ordre d'une fonction sur un arc du cercle de convergence est égal au plus grand des ordres qu'elle prend aux différents points de cet arc,

à laquelle nous ajouterons :

Si une fonction présente aux environs de x_0 une infinité de points où l'ordre soit infiniment voisin de ω, son ordre au point x_0 est au moins égal à ω.

Enfin la liaison entre les ordres d'une fonction sur le cercle et sur ses différentes parties est encore montrée par le théorème suivant :

Une fonction d'ordre ω sur un arc déterminé et en ses points extrêmes peut être remplacée par une somme de deux fonctions, dont l'une est d'ordre égal à ω ou dépassant ω d'aussi peu qu'on le veut sur le cercle entier, et l'autre est holomorphe en tous les points de l'arc considéré.

Envisageons, en effet, la fonction $\varphi = \omega_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$, qui est finie, continue et à écart fini sur l'arc donné. Par les deux extrémités de cet arc faisons passer une circonférence quelconque *acb* (*fig.* 6); puis, avec l'origine comme centre, décrivons un arc de cercle gd_1h de rayon $1-\eta$ (où η désigne un nombre positif infiniment petit). Les deux arcs de cercle, qui se coupent aux points g et h, délimitent une aire T où la fonction φ est holomorphe et où l'on peut lui appliquer la méthode de M. Appell. On aura ainsi

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

où

$$\varphi_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_{(gd_1h)} \frac{\varphi(z)}{z-x}\,dz.$$

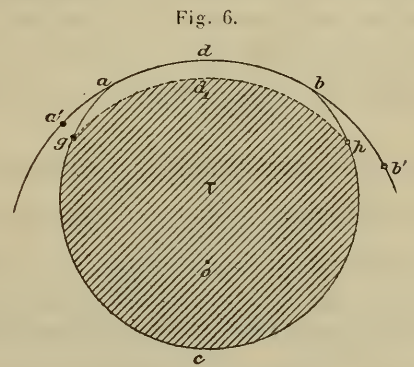
et

$$\varphi_2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{(gch)} \frac{\varphi(z)}{z-x}\,dz.$$

(¹) C'est-à-dire qu'une fonction qui présente sur un arc un point d'ordre ω est, sur cet arc, d'ordre *au moins égal* à ω.

Mais dans ces égalités nous pouvons maintenant supposer que le cercle gd_1h ne soit autre que le cercle de rayon 1 lui-même; car si nous faisons tendre η vers 0, les intégrales φ_1 et φ_2 varieront continûment, puisque φ est continue.

Fig. 6.



La fonction φ_1 est alors développable en série de la forme $\Sigma\lambda_m x^m$, où λ_m est donné par la formule

$$\lambda_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{adb}\frac{\varphi(z)}{z^{m+1}}dz,$$

laquelle montre immédiatement, puisque $\varphi(z)$ est à écart fini, que le module de λ_m est plus petit que $\frac{k}{m}$, le nombre k étant fixe. D'ailleurs, φ_2 est aussi développable en série de Maclaurin, puisque c'est la différence de deux fonctions développables.

Formons maintenant les fonctions $f_1 = \mathfrak{D}_x^{\omega+\varepsilon}\varphi_1$ et $f_2 = \mathfrak{D}_x^{\omega+\varepsilon}\varphi_2$ dont la somme donnera la fonction f. La première est d'ordre $\omega+\varepsilon$ au plus sur le cercle entier, puisque le coefficient du terme en x^m, à savoir $\lambda_m m^{\omega+\varepsilon}$, est plus petit que $km^{\omega+\varepsilon-1}$. La seconde f_2 est holomorphe sur l'arc donné. Le théorème est donc démontré.

Il semble que le raisonnement précédent n'établisse pas la régularité de f_2 aux points a et b, extrémités de l'arc donné. Mais nous avons déjà remarqué que la fonction f, qui est d'ordre au plus égal à ω au point a, est nécessairement du même ordre sur un petit arc aa' contigu au point a. En opérant de même pour l'extrémité b et portant à la suite de l'arc ab un petit arc bb', on pourra refaire la démonstration en partant de l'arc $a'b'$, ce qui supprime toute difficulté.

45. Nous avons défini l'ordre en considérant $\mathcal{D}_x^{-\omega} f(x)$. Mais à cette expression on peut tout aussi bien substituer $x^{-\omega} \mathrm{D}_x^{-\omega} f(x)$, d'après ce que nous avons remarqué au n° **55**.

Cette dernière fonction nous sera plus commode pour l'étude que nous allons entreprendre maintenant, et qui consiste à rechercher comment l'ordre d'une fonction au point x_0 est lié à son ordre de grandeur autour de ce point. Mais cette étude ne sera pas également facile dans tous les cas.

Si, en effet, on suppose, par exemple, que notre fonction soit une somme de termes de la forme $\frac{\mathrm{A}}{(x - x_0)^\alpha}$, où les α sont positifs, l'ordre au point x_0 sera nécessairement le plus grand des nombres α.

Il n'en sera pas de même dans les cas où l'ordre sera négatif et où notre fonction sera une somme de puissances positives de $x - x_0$. Car alors il peut se faire que le terme de moindre degré en $x - x_0$ soit un terme holomorphe qui n'aurait aucune influence sur l'ordre. Par exemple, la fonction $\mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$ n'est pas d'ordre -1, mais bien d'ordre $-\frac{3}{2}$. Aussi nos propositions fondamentales seront-elles établies exclusivement pour les ordres positifs, ce qui ne nous empêchera pas d'étendre leurs principales conséquences aux ordres quelconques.

En premier lieu, *si la fonction f a, sur un arc déterminé et à ses extrémités, un ordre inférieur au nombre positif* ω, *et que l'on décrive, avec un rayon voisin de l'unité, un arc de cercle limité aux mêmes rayons que le premier* (*fig.* 7) :

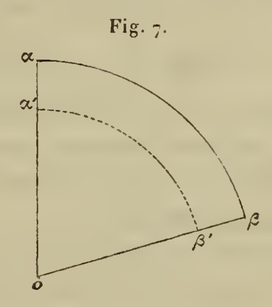
1° *Le produit* $(1 - \rho)^\omega f(\rho e^{i\theta})$ *tend vers* 0, *et cela uniformément, quel que soit l'argument* θ, *pourvu que le rayon correspondant coupe l'arc donné;*

2° *Si* I *désigne l'écart sur l'arc de cercle de rayon* ρ, *le produit* $(1 - \rho)^\omega \mathrm{I}$ *tend aussi vers* 0.

Supposons d'abord la fonction d'ordre moindre que ω sur le cercle entier. Le quotient $\frac{a_m}{m^{\omega - 1}}$ tend vers 0 pour m augmentant indéfiniment. Si nous désignons par G_m^ω le coefficient de x^m dans le développement de $\frac{1}{(1 - x)^\omega}$, nous pourrons dire encore que le quotient $\frac{a_m}{\mathrm{G}_m^\omega}$ tend vers 0.

Car la quantité $G_m^\omega = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \frac{\Gamma(m+\omega)}{\Gamma(m+1)}$ est comparable à $\frac{m^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}$, ainsi qu'on l'a vu au n° **35**. Si donc ε est un nombre donné aussi petit qu'on

Fig. 7.



le veut, on a, à partir d'une certaine valeur m_0 de m,

$$|a_m| < \frac{\varepsilon}{2} G_m^\omega.$$

On peut admettre que cette inégalité est vérifiée aussi pour les valeurs de m inférieures à m_0, sauf à ajouter un polynôme $\varphi(x)$ de degré m_0. La fonction f sera donc constamment plus petite que

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum \rho^m G_m^\omega + |\varphi(x)|.$$

D'ailleurs $\sum \rho^m G_m^\omega$ étant égal à $\frac{1}{(1-\rho)^\omega}$, il viendra

$$(1-\rho)^\omega |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + (1-\rho)^\omega |\varphi|.$$

Or le second membre de cette inégalité peut être rendu moindre que ε pour ρ suffisamment voisin de 1.

Quant à l'écart I de la fonction sur le cercle de rayon ρ, nous avons vu précédemment (n° **40**) qu'il est égal à $k_1 S + k_2 \mu$, en appelant S la série formée par les modules des termes de la série (2), et μ la plus grande valeur du produit $m L m |a_m| \rho^m$. On peut appliquer au premier terme S le raisonnement précédent, et l'on voit que le produit $(1-\rho)^\omega S$ tend vers 0.

Pour avoir une limite supérieure de μ, nous pourrons d'abord nous borner à considérer les valeurs de m supérieures à un entier déterminé quelconque; car, pour m fini, le produit $m\,\mathrm{L}m\,|a_m|\,\rho^m(1-\rho)^\omega$ tend évidemment vers o. Or, pour m suffisamment grand, le module de a_m est moindre que $\frac{m^{\omega'-1}}{\mathrm{L}m}$, en appelant ω' un nombre plus petit que ω, mais plus grand que l'ordre de la fonction donnée. Si nous remplaçons ρ par $1-\eta$, nous voyons que nous avons à considérer la plus grande valeur de la quantité $(1-\eta)^m m^{\omega'}\eta^\omega$ et à rechercher ce que devient ce maximum lorsque η tend vers o.

En écrivant que la quantité en question s'accroît par le changement de m en $m+1$, nous trouvons que m doit être plus petit que $\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{\frac{1}{\omega}}-1}$. Si m_0 désigne le plus petit entier supérieur à cette limite, nous voyons que notre expression croît jusqu'à $m=m_0$ et décroît ensuite. Le maximum a donc lieu pour $m=m_0$. D'ailleurs, m_0 peut être remplacé par $\frac{\omega'}{\eta}$, à une erreur près qui reste finie pour η infiniment petit, et, par suite, ne peut altérer que dans un rapport fini le produit qui nous occupe. Ce dernier prend alors la forme

$$(1-\eta)^{\frac{\omega'}{\eta}}\left(\frac{\omega'}{\eta}\right)^{\omega'}\eta^{\omega}.$$

Le premier facteur a pour limite $e^{\omega'}$; le produit des deux autres tend vers o. La seconde partie de notre théorème est donc aussi établie.

Nous avons, il est vrai, supposé que $f(x)$ est d'ordre moindre que ω sur le cercle entier; mais on ramène le cas général à celui-là en ajoutant une fonction holomorphe sur l'arc donné (n° **42**).

Si la quantité $\frac{a_m}{m^{\omega-1}}$, au lieu de tendre vers o, avait une limite quelconque A, le raisonnement donné plus haut conduirait à ce résultat, que le produit $f(x)(1-x)^\omega$ aurait pour limite A [1] toutes les fois

---

[1] Ce théorème, pour le cas des séries réelles, a été établi par M. Appell (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII; 1878).

que x tendrait vers 1 par des valeurs telles que le rapport $\frac{|1-x|}{1-\rho}$ reste fini, ou, autrement dit, que la droite joignant le point variable au point d'affixe 1 fasse un angle fini avec la tangente au cercle de convergence en ce dernier point. Pour $\omega = 1$, et en posant $f(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x}$, ce fait revient au théorème connu ([1]) :

Si la série (2) *est convergente en un point x_0 du cercle et a pour somme* A, *sa valeur a pour limite* A, *lorsque x se rapproche de x_0 par des chemins faisant un angle fini avec le cercle.*

44. Inversement, *si les quantités* $(1-\rho)^\omega f(\rho e^{i\theta})$ *et* $(1-\rho)^\omega \mathrm{I}$ *restent finies et moindres qu'une quantité* A *lorsque l'on fait tendre* ρ *vers l'unité,* θ *variant entre* α *et* β, *la fonction est d'ordre au plus égal à* ω *sur l'arc* $\alpha\beta$ (*fig.* 7).

Pour le démontrer, on désignera par ω'' un nombre supérieur d'aussi peu qu'on voudra à ω, et l'on considérera la quantité

$$(63) \qquad x^{-\omega''} \mathrm{D}_x^{-\omega''} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\omega'')} \int_0^1 (1-t)^{\omega''-1} f(tx)\, dt.$$

D'après les hypothèses actuelles, t étant différent de 1, le module de $f(x)$ est moindre que $\frac{\mathrm{A}}{(1-t)^\omega}$, quelle que soit la valeur de x d'argument compris entre α et β, et de module inférieur ou même égal à 1. Il en résulte que l'intégrale précédente est finie et même uniformément finie, c'est-à-dire que l'intégrale $\frac{1}{\Gamma(\omega'')} \int_0^{\mathrm{T}} (1-t)^{\omega''-1} f(tx)\, dt$ tend uniformément vers sa limite quand T tend vers 1. Or, pour T différent de 1, cette dernière intégrale est une fonction finie et continue de x dans les limites de variation précédentes. On peut, dès lors, refaire le raisonnement qu'on emploie à propos des séries uniformément convergentes ([2]) et conclure que ces propriétés de continuité subsistent pour $\mathrm{T} = 1$.

([1]) *Voir* Stoltz, *Allgemeine Arithmetik,* t. II.

([2]) Au reste, on pourrait considérer cette intégrale comme une série, en la par-

L'écart de la fonction (63) sur l'arc $\alpha\beta$ se trouve en considérant l'expression

$$\frac{n}{\Gamma\omega''}\int_\alpha^\beta e^{\pm ni\theta}\int_0^1 (1-t)^{\omega''-1} f(te^{i\theta})\,dt.$$

Étant donnée la manière dont f devient infini aux environs du cercle de convergence, cette expression définit une intégrale double; nous pouvons donc renverser l'ordre des intégrations et écrire

$$\frac{1}{\Gamma(\omega'')}\int_0^1 \left[(1-t)^{\omega''-1}dt\int_\alpha^\beta ne^{\pm ni\theta} f(te^{i\theta})\,d\theta\right].$$

Or l'intégrale qui multiplie $dt(1-t)^{\omega''-1}$ est inférieure à I, écart de la fonction f sur le cercle de rayon t, et, par conséquent, moindre que $\frac{A}{(1-t)^{\omega}}$, ce qui donne, pour l'intégrale finale, une valeur moindre que $\frac{A}{\Gamma(\omega'')(\omega''-\omega)}$.

Nous arrivons donc à cette conclusion que la fonction $x^{-\omega''} D_x^{-\omega''} f(x)$ est finie, continue et à écart fini sur l'arc $\alpha\beta$, et cela quand on choisit le nombre ω'' supérieur d'aussi peu qu'on le veut à ω; ce qui montre que f est bien d'ordre au plus égal à ω sur l'arc $\alpha\beta$.

45. Nous obtenons ainsi, comme on le voit, une nouvelle définition de l'ordre, du moins lorsque ce nombre est positif. Ce sera le plus petit nombre ω tel que les quantités $(1-\rho)^{\omega} f(\rho e^{i\theta})$ et $(1-\rho)^{\omega}$I restent finies quand ρ tend vers l'unité.

Multiplions maintenant la fonction f par une fonction ψ qui reste finie et continue dans le secteur qui a pour base l'arc $\alpha\beta$ (*fig.* 7), et dont les parties réelle et imaginaire aient chacune un nombre fini de maxima et de minima tant sur l'arc $\alpha\beta$ que sur les arcs correspondants des cercles concentriques et intérieurs. Le produit $(1-\rho)^{\omega} f(\rho e^{i\theta})$ restera fini après cette multiplication s'il l'était avant, et il en sera de

tageant en intégrales partielles prises entre les limites o et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{8}$, etc. On reconnaît facilement que la série formée par ces intégrales partielles est uniformément convergente.

même du produit $(1-\rho)^\omega I$; car nous savons (n° **39**) que l'écart sera multiplié simplement par le plus grand module de la fonction ψ dans l'intervalle considéré et par un nombre fini. L'ordre de f ne sera donc pas augmenté.

Il en sera encore de même si l'on multiplie la fonction f par $L(x-x_0)$, la quantité x_0 désignant l'affixe d'un point situé sur le cercle de convergence; car les produits $(1-\rho)^\omega f$ et $(1-\rho)^\omega I$ seront multipliés par $L(1-\rho)$, lequel est moindre que toute puissance positive de $\frac{1}{1-\rho}$, quelque petit que soit l'exposant.

46. Ceci nous donne tout d'abord la détermination de l'ordre dans les cas les plus usuels.

En premier lieu, pour toute valeur négative de r, l'ordre de $(x-x_0)^r$ est évidemment égal à $-r$ au point x_0. Il en sera de même, d'après les remarques précédentes, pour les fonctions

$$(x-x_0)^r\psi, \quad (x-x_0)^r\psi L^h(x-x_0),$$

où ψ est une fonction satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus et h un entier quelconque. Du moins l'ordre de ces fonctions sera *au plus* égal à $-r$. Mais il faut remarquer que l'ordre de $(x-x_0)^r L^h(x-x_0)$ ne saurait être moindre que $-r$ (n° **45**).

Envisageons maintenant, pour une valeur positive de r, la fonction $(x-x_0)^r \mathfrak{P} L(x-x_0)$, où $\mathfrak{P}$ est un polynôme [1]. Si r est un entier et que $\mathfrak{P}$ se réduise à une constante, la fonction est holomorphe. Dans le cas contraire, la dérivée de cette fonction sera de la forme $(x-x_0)^{r-1}\mathfrak{P}_1$, et, en général, la dérivée d'ordre E sera de la forme $(x-x_0)^{r-E}\mathfrak{P}_E$. Cette dernière expression, si E a été choisi supérieur à r, est de l'ordre $E-r$, puisqu'elle rentre dans celles qui viennent d'être étudiées. Il en résulte que la fonction donnée est de l'ordre $-r$.

Or le cas qui se présente le plus fréquemment est celui où la fonction non holomorphe au point x_0 se présente autour de ce point sous

---

[1] L'expression $\mathfrak{P}$ pourrait d'ailleurs contenir des puissances négatives de $L(x-x_0)$ sans que nous ayons à modifier la suite de nos raisonnements.

la forme

$$\sum(x - x_0)^{r_i} \mathfrak{P}_i \mathrm{L}(x - x_0) + \sum(x - x_0)^{r_i + h_i} \psi_i,$$

où les r_i sont des nombres quelconques, positifs ou négatifs, les h_i des entiers positifs et les ψ_i des fonctions régulières. On voit alors que l'ordre de la première partie est égal au plus petit des nombres r_i changé de signe, en exceptant ceux pour lesquels $\mathfrak{P}_i$ se réduit à une constante, r_i étant un entier positif.

Quant à la seconde partie, elle ne modifie en aucune façon l'ordre, parce que la fonction $(x - x_0)^{r_i + h_i}\psi_i$ est d'ordre au plus égal à $-r_i - h_i$. Ceci résulte du théorème suivant :

47. *On ne saurait augmenter l'ordre d'une fonction sur un arc quelconque en la multipliant par une fonction holomorphe en tous les points de cet arc.*

On est même assuré que l'ordre n'a changé en aucune façon, si la fonction multiplicatrice ne s'annule en aucun point de l'arc.

En premier lieu, une fonction holomorphe jouissant de toutes les propriétés que nous avons indiquées pour les fonctions ψ, nous savons déjà que si l'ordre de la fonction donnée est positif, il ne pourra pas être augmenté par la multiplication. De plus le même raisonnement prouve que si l'ordre était plus petit qu'un nombre positif quelconque il ne peut devenir plus grand que ce même nombre. En particulier, s'il était négatif ou nul, il ne peut devenir positif.

Soit maintenant une fonction d'ordre négatif $-r$ sur l'arc $\alpha\beta$, que l'on multiplie par une fonction ψ régulière le long du même arc ; soit E le plus petit entier supérieur à r, de sorte que la dérivée E^{ième} de ψ est d'ordre positif $\mathrm{E} - r$. La formule de Leibnitz nous donne pour la dérivée E^{ième} du produit $f\psi$ une somme de termes de la forme $\mathrm{D}_x^{\mathrm{E}-k} f . \mathrm{D}_x^k \psi$ multipliés par des coefficients numériques. Or, pour k différent de 0, la dérivée $\mathrm{D}_x^{\mathrm{E}-k} f$ est d'ordre négatif ou nul, et reste telle après la multiplication par $\mathrm{D}_x^k \psi$, d'après la remarque qui vient d'être faite. Quant à $\mathrm{D}_x^{\mathrm{E}} f$, il a pour ordre le nombre $\mathrm{E} - r$, lequel est positif, et, par suite, n'est pas augmenté par la multiplication. La dérivée

E^{ieme} de $f\psi$ est donc bien au plus d'ordre $E - r$, de sorte que $f\psi$ lui-même ne peut être d'ordre supérieur à $-r$.

La seconde partie du théorème résulte de la première; car, si ψ ne s'annule pas sur l'arc donné, les deux fonctions ψ et f sont toutes deux holomorphes le long de cet arc, de sorte que l'ordre ne peut être ni augmenté ni diminué.

Enfin, nous énoncerons encore, dans le même ordre d'idées, une dernière proposition :

Quand on multiplie entre elles deux fonctions d'ordre positif, l'ordre du produit est au plus égal à la somme des ordres des facteurs.

Soient ω et ω' les deux ordres, que nous supposerons d'abord pris sur le cercle de convergence entier; ε un nombre positif très petit. Les coefficients de x^m dans les deux séries seront, à partir d'un certain rang, plus petits respectivement que $G_m^{\omega+\varepsilon}$ et $G_m^{\omega'+\varepsilon}$ (n° **45**). Supposons les coefficients moindres que les limites précédentes pour toutes les valeurs de m, ce que l'on peut faire en retranchant des deux séries des polynômes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ convenablement choisis.

La formule de multiplication des séries ne contient que les signes $+$ et $\times$, à l'exclusion de tout signe $-$. Le coefficient de x^m dans la série produit est donc moindre que le coefficient de x^m dans le produit $\frac{1}{(1-x)^{\omega+\varepsilon}}\frac{1}{(1-x)^{\omega'+\varepsilon}}$, c'est-à-dire que $G_m^{\omega+\omega'+2\varepsilon}$. Quant aux parties complémentaires provenant des polynômes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$, elles sont d'ordres ω et ω' au plus.

Si les ordres ω et ω' sont ceux des fonctions données sur une partie seulement du cercle, on les transformera en fonctions d'ordres inférieurs à $\omega+\varepsilon$ et $\omega'+\varepsilon$ sur le cercle entier par la soustraction de fonctions régulières (n° **40**). Ces dernières à leur tour, en vertu du théorème précédent, ne donnent dans la multiplication que des produits partiels d'ordres ω et ω' au plus. Le produit total est donc d'ordre moindre que $\omega+\omega'+2\varepsilon$. Notre théorème est par suite démontré, puisque ε peut être pris aussi petit qu'on le veut.

48. Les théorèmes précédents vont nous permettre de *calculer la*

valeur de la fonction donnée en un point ordinaire du cercle de convergence, pourvu toutefois que l'ordre sur ce cercle soit un nombre fini.

Soit, en effet, ω cet ordre supposé positif (¹); soit x_0 un point ordinaire du cercle où la fonction ait la valeur A, de sorte qu'elle puisse se mettre sous la forme

$$(64) \qquad A + (x - x_0)\psi,$$

ψ désignant une fonction régulière autour du point x_0.

Prenons un nombre ω' plus grand que ω et multiplions f par $\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}} = \sum x^m \dfrac{G_m^{\omega'}}{x_0^m}$. En tout point du cercle autre que x_0 l'ordre restera invariable, en vertu du nº **47**. Au point x_0 l'ordre sera donné par le terme $\dfrac{A}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$ et sera, par suite, plus grand que ω. Donc la partie principale des coefficients de $\dfrac{f}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$ provient de ce terme $\dfrac{A}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$, de sorte que le rapport des coefficients correspondants dans les développements de $\dfrac{f}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$ et de $\dfrac{A}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$ a pour limite l'unité. Il en résulte

$$(65) \qquad A = \lim_{m=\infty} \frac{a_0 G_m^{\omega'} + a_1 x_0 G_{m-1}^{\omega'} + \ldots + a_m x_0^m}{G_m^{\omega'}}.$$

Il est clair que le second membre pourrait s'écrire sous forme d'une série, de sorte qu'on a la proposition suivante :

Théorème. — *Si la série (2) est d'ordre fini sur le cercle de convergence, on peut former une série de polynômes qui converge et représente la fonction, non seulement à l'intérieur du cercle, mais encore en tout point non singulier de la circonférence.*

(¹) Si ω était négatif, il devrait être remplacé par o dans les raisonnements qui suivent.

Soit, par exemple, $f(x) = \frac{1}{1-x}$. En prenant $\omega' = 2$, on trouve

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} (1 + 2x + 3x^2 \ldots + m x^{m-1}).$$

Si ω est plus petit que 1, on peut prendre $\omega' = 1$ et la formule (65) devient

$$\mathrm{A} = \lim(a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_m x_0^m).$$

Notre méthode revient donc ici à la sommation directe de la série et nous retrouvons le théorème connu : *La série de Taylor est convergente sur le cercle tant que la fonction ne présente sur ce cercle que des points singuliers d'ordre inférieur à* 1.

Si l'on veut trouver le second terme du développement de f autour du point x_0, on commencera par retrancher A, après quoi on divisera non plus par $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\omega'}$, mais par $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\omega'+1}$, et ainsi de suite.

Cette méthode peut, d'ailleurs, s'étendre à certains points singuliers : tout d'abord ceux (d'ordre nécessairement négatif) où f est de la forme (64), la fonction ψ satisfaisant aux conditions énumérées au n° **45**. Supposons ensuite qu'en un point singulier notre fonction puisse se mettre sous la forme $\frac{\mathrm{A}}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha}} + f_1$, où f_1 est d'ordre moindre que α. Il suffira de diviser par $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\omega'-\alpha}$. Le terme f_1 donnera (n° **47**) un résultat d'ordre inférieur à ω' et, comme sur le reste du cercle la fonction n'est que de l'ordre ω, on obtiendra A par une formule analogue à la formule (65), mais où figurent au numérateur les quantités $\mathrm{G}_m^{\omega'-\alpha}$ au lieu des quantités $\mathrm{G}_m^{\omega'}$.

49. Recherchons maintenant s'il est possible d'abaisser l'ordre de notre fonction en la multipliant par le binôme $1 - \frac{x}{x_0}$.

Cette multiplication ne pouvant changer l'ordre qu'au point x_0 (n° **47**), ce point doit être un point singulier. Ce doit être un point isolé sur le cercle, ou du moins, s'il y a des points critiques infiniment voisins, leur ordre doit être moindre que celui de x_0 et en différer

d'une quantité finie ; car l'ordre en un point voisin de x_0 ne peut être altéré par la multiplication, et s'il est infiniment voisin de ω, l'ordre au point x_0 ne peut être moindre que ω (n° **42**).

D'autre part, il est clair que la multiplication par $1 - \frac{x}{x_0}$ diminuera d'une unité l'ordre au point x_0 toutes les fois que f pourra se développer autour de x_0, comme nous l'avons indiqué au n° **46**, en une somme de termes de la forme

$$\sum (x - x_0)^{\gamma} \varphi_k \mathrm{L}(x - x_0) + (x - x_0)^{\gamma + h} \psi_1.$$

Il resterait à trouver une condition nécessaire et suffisante. En tout cas, on peut dire que si cette propriété a lieu pour $f(x)$, elle a lieu aussi pour toutes les fonctions $x^{\alpha} \mathrm{D}^{\alpha} f(x)$.

En effet, premièrement ceci est vrai pour $\alpha = 1$, car on a

$$\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f(x) = -\frac{f(x)}{x_0} + \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f'(x),$$

ce qui montre que si $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f(x)$ est d'ordre moindre que $f(x)$, de même $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f'(x)$ sera d'ordre moindre que $f'(x)$ et inversement. De proche en proche, la conclusion s'étend à toutes les valeurs entières et positives de α.

D'ailleurs, pour α négatif, l'intégrale $\int_0^1 (1 - t)^{-\alpha - 1} f(tx)\left(1 - \frac{tx}{x_0}\right) dt$ peut s'écrire

$$(66) \quad \frac{x}{x_0} \int_0^1 (1 - t)^{-\alpha} f(tx)\, dt - \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \int_0^1 (1 - t)^{-\alpha - 1} f(tx)\, dt.$$

Si donc $f(x)\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$ est d'ordre moindre que l'ordre ω de $f(x)$, l'expression (66) est d'ordre moindre que $\omega + \alpha$ et, comme il en est de même de son premier terme, il en est aussi de même du second. Inversement si, $f(x)$ étant d'ordre ω, la fonction $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) x^{\alpha} \mathrm{D}_x^{\alpha} f(x)$ est d'ordre moindre que $\omega - \alpha$, le produit de $f(x)$ par $1 - \frac{x}{x_0}$ sera d'ordre moindre que ω.

Étant démontrée pour α négatif et pour α positif et entier, notre proposition est générale.

30. Quoi qu'il en soit, supposons que, $f(x)$ étant d'ordre ω, tous les points singuliers d'ordre ω appartiennent à la classe que nous venons de considérer.

On abaissera l'ordre de tous ces points et, par suite, l'ordre de la fonction sur le cercle en multipliant notre fonction par le polynôme

$$\varphi = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_p}\right),$$

qui a pour racines les affixes de ces points singuliers.

Dès lors la recherche de ces points singuliers est ramenée à un problème que nous avons traité dans la deuxième Partie (nos 25 et suivants). La fonction M, qui figure dans l'énoncé du no 25, est ici égale à m. D'après les conclusions auxquelles nous sommes parvenu en cet endroit, *il faudra former avec $p - 1$ indices $m_1, m_2, \ldots, m_p$ un déterminant $D_{m_1, \ldots, m_p}$, considérer la plus petite des quantités $\frac{1}{\omega m} \mathrm{L} \left| \frac{D}{m^{\omega}} \right|$ et rechercher la limite supérieure du quotient ainsi obtenu pour $m_1, \ldots, m_p$ infinis. Si l'on fait cette opération pour $p = 1, 2, \ldots$, la première valeur de p qui donnera un résultat moindre que $\omega - 1$ sera égale au nombre des points singuliers d'ordre ω.* On trouvera, d'ailleurs, ces points eux-mêmes, ainsi qu'il a été indiqué au no 25.

Si l'on a $p = 1$, l'affixe x_1 du point singulier sera, comme nous l'avons vu, la limite du rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$, mais en ne prenant que les valeurs principales de a_m.

Si cependant, autour du point x_1, la fonction pouvait se remplacer par $\frac{A}{(1 - x_1 x)^{\omega}}$ augmentée d'une fonction d'ordre moindre que ω, le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tendrait régulièrement vers x_1. Mais il n'en est pas nécessairement ainsi. Nous en avons vu un exemple dans la fonction

(92) $$\sum \sin(\mathrm{L}\, m)\, x^m,$$

qui admet pour point singulier unique le point $x = 1$. Ce point appartient bien d'ailleurs à la classe qui a été considérée au numéro précédent; car, si l'on multiplie la fonction par $1 - x$, le coefficient de x^m deviendra

$$\sin \mathrm{L} m - \sin \mathrm{L}(m-1) = 2 \cos \tfrac{1}{2} \mathrm{L}[m(m-1)] \sin \tfrac{1}{2} \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{m-1}\right);$$

le dernier facteur est de l'ordre de $\frac{1}{m}$, alors que les autres donnent un produit plus petit que 2. Après la multiplication par $1 - x$, la fonction (62) est donc devenue d'ordre 0, tandis qu'elle était d'ordre 1 auparavant. Malgré cela, nous avons constaté que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ ne tendait pas vers l'unité.

Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *et la Théorie de la chaleur;*

PAR M. PAUL APPELL.

L'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, qui se présente dans la Théorie de la chaleur, a été l'objet d'un grand nombre de travaux. Intégrée par Fourier, Poisson, Ampère ([1]), elle a été étudiée en détail par Riemann dans son Ouvrage sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique ([2]), et par Schlaefli, dans un Mémoire inséré au Tome 72 du *Journal de Crelle*. M. Jordan l'a traitée comme exemple dans le Tome III de son *Cours d'Analyse* (p. 387). M. Boussinesq a résumé les méthodes générales d'intégration propres à cette équation et aux autres équations de la Physique mathématique dans le Tome II de son *Cours d'Analyse infinitésimale* (*Calcul intégral, Compléments*). Citons encore Mme Kowalevski ([3]), qui a appliqué à cette équation spéciale les méthodes de Cauchy, M. Bourlet, qui l'a prise comme exemple dans sa Thèse de doctorat, en regardant l'équation comme résultant de l'élimination de v entre les deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, t. X, p. 587.

([2]) *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, p. 107, 122; 1869.

([3]) *Journal de Crelle*, t. 80, p. 22.

qui forment un système canonique et complètement intégrable. Ces équations admettent comme système d'intégrales le plus général des fonctions z et v qui, pour $x = x_0$, se réduisent respectivement à des fonctions données à l'avance de la variable y (¹). On ne peut pas affirmer qu'il existe une intégrale z qui, pour $y = 0$, se réduise à une fonction donnée de x. Mme Kowalevski a montré, par exemple (*loc. cit.*), que cette équation n'a pas d'intégrale qui se réduise à $\frac{1}{1-x}$ pour $y = 0$. M. Darboux (²) a rappelé cet exemple de Mme Kowalevski à propos d'une Note de M. Méray (³) sur un fait de même nature.

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

constitue le type le plus important auquel on peut réduire les équations linéaires à coefficients constants.

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0$$

dans le cas *parabolique* $B^2 - AC = 0$, comme on le verra dans un Mémoire récent de M. du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 104). Le cas elliptique $B^2 - AC < 0$ a été étudié par de nombreux auteurs, Lejeune-Dirichlet, Riemann, Schwarz, Weber (⁴). Plus récemment, M. Picard a consacré d'importants Mémoires à l'étude de ce cas, même dans l'hypothèse des coefficients variables (⁵); il a montré que, si $B^2 - AC > 0$, l'intégrale n'est pas nécessairement analytique. M. du Bois-Reymond s'est occupé, dans le Mémoire cité (*Crelle*, t. 104), du

(¹) Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées*, Thèse de doctorat, p. 53.

(²) *Comptes rendus*, t. CVI, p. 651.

(³) *Ibid.*, p. 648.

(⁴) *Mathematische Annalen*, t. I.

(⁵) *Acta mathematica*, t. XII; *Journal de Mathématiques*, 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, LXe Cahier, 1890; *Comptes rendus*, 1891, premier semestre.

cas hyperbolique $B^2 - AC > 0$, en employant principalement la considération de l'équation adjointe et une méthode analogue à celle de Riemann [1].

Dans ce travail, nous ne reprenons pas les résultats que donnent les méthodes de Cauchy; nous nous plaçons surtout au point de vue de la Physique mathématique, en supposant x, y et z réels, et nous nous inspirons des méthodes de Riemann. Nous nous attachons principalement (n^{os} **10** et suivants) à répondre à une question qui nous a été posée par M. Boussinesq sur la Théorie de la chaleur et que nous avons résolue en partie dans une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 27 mai 1890. Cette question peut s'énoncer comme il suit. On considère un conducteur indéfini dans lequel la température u est supposée dépendre uniquement de l'abscisse x. Cette température u étant donnée arbitrairement en fonction de x, $u = f(x)$, à l'instant initial $t = 0$, les formules de Fourier déterminent la température à un instant postérieur t quelconque, $t > 0$. Mais on demande : 1° si l'état initial donné pour u, $u = f(x)$, provient lui-même d'un état antérieur ($t < 0$); 2° lorsque cet état antérieur existe, s'il est unique, et comment on peut le trouver. Nous pensons avoir répondu d'une manière satisfaisante à ces deux questions : l'état antérieur n'existe pas toujours; quand il existe, il est unique et peut être déterminé dans des cas très généraux. Pour que l'état antérieur existe, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction donnée $f(x)$ soit une fonction transcendante entière de x, c'est-à-dire une fonction développable en une série procédant suivant les puissances entières positives de x, convergente quel que soit x.

1. Résolvons d'abord la question suivante :

Chercher toutes les transformations de la forme

$$z = \lambda(x, y) z', \qquad x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y),$$

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, Chap. IV.

qui ramènent l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

à la même forme

$$\delta z = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} - \frac{\partial z'}{\partial y'} = 0.$$

Un calcul facile, mais un peu long, conduit au résultat suivant, qu'on peut aussi déduire des propositions données par M. Lie, dans son Mémoire *Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearen partiellen Differentialgleichungen*, p. 356. La substitution la plus générale, conservant à l'équation sa forme, est

$$z = \frac{C}{\sqrt{y-\alpha}} e^{-\frac{(x-\beta)^2}{4(y-\alpha)}} z',$$

$$x' = \frac{k(x-\beta)}{y-\alpha} + \beta', \qquad y' = -\frac{k^2}{y-\alpha} + \alpha',$$

où C, k, α, β, α', β' désignent des constantes arbitraires dont les deux premières sont différentes de zéro.

Cette substitution générale est composée avec les substitutions simples

$$(1) \qquad z = Cz', \qquad x' = kx + \alpha, \qquad y' = k^2 y + \beta,$$

$$(2) \qquad z = \frac{z'}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}, \qquad x' = \frac{x}{y}, \qquad y' = -\frac{1}{y},$$

dont la première est évidente. On voit en particulier que, si $z = F(x, y)$ est une solution de l'équation $\delta z = 0$,

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} F\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right)$$

en est une autre. La transformation

$$x' = \frac{x}{y}, \qquad y' = -\frac{1}{y}$$

est une transformation homographique du plan des xy, qui remplace ici l'inversion de Thomson pour le potentiel.

Par exemple, la solution

$$z = e^{ax+a^2y},$$

où a désigne une constante arbitraire, donne, par la transformation ci-dessus, la solution

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{(x-2a)^2}{4y}},$$

qui est bien connue.

2. La solution de l'équation $\delta z = 0$,

$$z = e^{ax+a^2y},$$

est finie et continue en tous les points à distance finie, et admet des dérivées de tous les ordres. Il existe des solutions plus simples possédant cette propriété, ce sont les solutions qui sont des polynômes en x et y.

Si l'on développe e^{ax+a^2y} en série ordonnée suivant les puissances de a,

$$(3) \qquad e^{ax+a^2y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2\ldots\nu} V_\nu(x, y),$$

les coefficients $V_\nu(x, y)$ sont des polynômes en x et y homogènes et du degré ν par rapport à x et $\sqrt{y}$; ces polynômes vérifient évidemment l'équation différentielle, puisque la fonction (3) la vérifie quelle que soit la constante a. La méthode des coefficients indéterminés montre, en outre, que ce sont les seuls polynômes vérifiant l'équation.

Il est à remarquer que ces polynômes s'expriment simplement à l'aide des polynômes à une variable que M. Hermite [1] a déduits de la différentiation de l'exponentielle e^{-z^2}. Les polynômes de M. Hermite sont, en effet, définis par la série

$$e^{-2hz-h^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{h^\nu}{1.2\ldots\nu} P_\nu(z).$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266.

Faisons

$$h = a\sqrt{-y}, \qquad z = -\frac{x}{2\sqrt{-y}},$$

nous aurons

$$e^{ax+a^2y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2\ldots\nu}(-y)^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{P}_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right),$$

d'où, en comparant au développement (3),

$$\mathrm{V}_\nu(x, y) = (-y)^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{P}_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right).$$

Les polynômes $\mathrm{P}_\nu(z)$ de M. Hermite ayant toutes leurs racines réelles et deux à deux égales et de signes contraires, l'équation

$$\mathrm{V}_\nu(x, y) = 0$$

représentera, si ν est pair, $\frac{\nu}{2}$ paraboles de la forme

$$-\frac{x^2}{4y} = p^2,$$

et si ν est impair, l'axe $x = 0$, avec $\frac{\nu-1}{2}$ paraboles de la même forme.

Ces fonctions $\mathrm{V}_\nu(x, y)$ jouent un rôle analogue aux fonctions de Laplace, c'est-à-dire aux fonctions harmoniques de Tait et Thomson, dans la théorie du potentiel.

Si nous posons

$$\mathrm{V}_{-(\nu+1)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \mathrm{V}_\nu\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right) = y^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \mathrm{P}_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{y}}\right),$$

cette fonction est homogène et du degré $-(\nu+1)$ en x et $\sqrt{y}$ et vérifie aussi l'équation différentielle ; elle s'annule en tous les points des paraboles symétriques des précédentes par rapport à l'axe Ox, l'origine exceptée.

On a ainsi des solutions $\mathrm{V}_\mu(x, y)$ définies pour toutes les valeurs

positives et négatives de l'indice μ. Les fonctions correspondant aux valeurs positives de μ sont des polynômes ; celles qui correspondent aux valeurs négatives de μ, des fonctions transcendantes ayant l'axe $y = 0$ comme ligne singulière.

On peut d'ailleurs former directement une fonction génératrice des fonctions V_μ à indices négatifs, en appliquant la transformation (2), page 190, aux deux membres du développement (3).

On a ainsi

$$(4) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{(x-2a)^2}{4y}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2\ldots\nu} V_{-(\nu+1)}(x, y).$$

On serait conduit également à ces fonctions $V_\mu(x, y)$ en cherchant des solutions de l'équation $\delta z = 0$ de la forme

$$z = y^{\frac{\mu}{2}} \varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right).$$

Pour cela, on transformera l'équation en posant

$$\frac{x}{2\sqrt{y}} = p,$$

et prenant comme nouvelles variables y et p. L'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + 2p \frac{\partial z}{\partial p} - 4y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Si l'on cherche des solutions de la forme

$$z = y^{\frac{\mu}{2}} \varphi(p),$$

on trouve, pour déterminer φ, l'équation

$$(5) \qquad \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + 2p \frac{d\varphi}{dp} - 2\mu\varphi = 0,$$

qui, pour μ entier et positif, est bien identique à celle que vérifient

les polynômes $P_\mu(z)$ de M. Hermite, dans lesquels on remplace z par $p\sqrt{-1}$.

Cette équation (5) a pour solutions les fonctions $V_\mu(2p, 1)$, pour toutes les valeurs entières de μ; elle admet, pour chaque valeur entière de μ, une deuxième solution qu'il est facile d'exprimer par des quadratures et qui se présente ici comme les *Kugelfunctionen zweiter Art* de Heine.

Enfin cette équation pourrait servir à définir les $V_\mu(x, y)$ à indices fractionnaires.

Contentons-nous ici de détailler le cas $\mu = 0$. Nous avons alors la solution $\varphi = \text{const.}$, puis

$$\varphi_0(p) = \int_0^p e^{-p^2} dp = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \frac{p^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme $\mu = 0$, la fonction

$$z = \varphi_0(p) = \varphi_0\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right)$$

vérifie l'équation $\delta z = 0$; elle a pour coupure l'axe Ox et devient imaginaire quand on traverse cette coupure. Si on lui applique la transformation homographique (2), on en déduit la solution

$$z' = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \varphi_0\left(\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right),$$

qui donnerait une intégrale de l'équation (5) pour $\mu = -1$. Cette solution z' présente encore l'axe Ox comme ligne singulière, mais elle reste réelle quand on franchit cet axe; elle est en effet donnée par la série

$$z' = \frac{x}{2y} e^{-\frac{x^2}{4y}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{x^{2n}(4y)^{-n}}{2n+1},$$

qui ne contient y qu'à des puissances entières *négatives*. Toutes les dérivées partielles de z' sont des solutions présentant la même propriété.

Nous ne nous arrèterons pas aux formules qui expriment les dérivées partielles des fonctions V_μ à l'aide de ces fonctions, formules qui résultent immédiatement du développement (3) différentié successivement par rapport à x, y et a, ou encore des formules relatives aux polynômes de M. Hermite.

5. *Formule analogue à la formule de Green.* — La notion d'équation adjointe due à Riemann conduit immédiatement à l'extension du théorème de Green; c'est ce qui se trouve particulièrement mis en évidence dans les *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. Darboux (t. II, Chapitre IV) et dans le Mémoire de M. du Bois-Reymond [1] (*Journal de Crelle*, t. 104).

Soit une équation linéaire quelconque d'ordre n

$$\mathcal{F}(z) = \sum\sum A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0,$$

l'équation

$$\mathcal{G}(u) = \sum\sum (-1)^{i+k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}(A_{ik} u) = 0$$

est l'*adjointe* de la première, qui, inversement, est l'adjointe de $\mathcal{G}(u) = 0$. On a l'identité

$$u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

où M et N dépendent de z, de u et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$. D'après cela, si l'on considère une aire plane (A) simplement connexe et limitée par un contour (S), on a

$$\iint_{(A)} [u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u)]\, dx\, dy = \int_{(S)} (M\, dy - N\, dx),$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire (A) et l'intégrale simple au contour (S) de l'aire dans le sens positif. On connaît l'usage que Riemann et du Bois-Reymond ont fait de cette formule. Nous nous en

---

[1] Voyez aussi du même auteur : *Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen*. Leipzig, 1864.

servirons dans ce qui suit, en l'appliquant à l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

dont l'équation adjointe est

$$\delta' u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Il est à remarquer que si une expression $f(x - x_0, y - y_0)$ considérée comme fonction de x et y vérifie $\delta z = 0$, considérée comme fonction de x_0 et y_0, elle vérifie l'équation adjointe $\delta' z = 0$.

La formule générale devient ici

$$(6) \qquad \int\int_{(A)} (u\,\delta z - z\,\delta' u)\,dx\,dy = \int_{(S)} \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy + u\,z\,dx,$$

ce qu'il est facile de vérifier.

Supposons que l'on prenne pour u et z des fonctions qui, dans l'aire A, sont finies, continues, admettent les dérivées qui figurent dans les formules et vérifient les équations

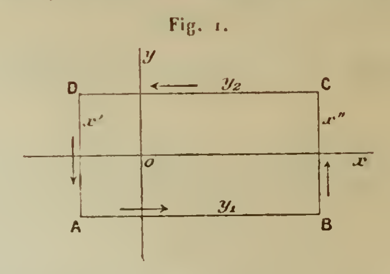
$$\delta z = 0, \qquad \delta' u = 0;$$

la formule deviendra

$$(7) \qquad \int_{(S)} \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy + u\,z\,dx = 0.$$

4. Appliquons cette dernière formule au cas où le contour S est un rectangle ABCD (*fig.* 1) dont les côtés AB et CD sont des parallèles

Fig. 1.



à l'axe ox ayant pour ordonnées y_1 et y_2, et dont les côtés AD, BC sont des parallèles à oy ayant pour abscisses x' et x''.

Comme sur AB et CD, on a $dy = 0$, et sur BC et DA, $dx = 0$, on obtient la formule

$$(8)\quad \int_{x'}^{x''} (z_1 u_1 - z_2 u_2)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)' - \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)''\right] dy,$$

où $z_1 u_1$ et $z_2 u_2$ sont les valeurs de zu sur les côtés y_1 et y_2, $\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)'$ et $\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)''$ les valeurs de $\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ sur les côtés x', x''.

Comme première conséquence de cette formule, nous allons établir une propriété fondamentale des polynômes $V_\nu(x, y)$, propriété qui se déduirait d'ailleurs facilement des propriétés connues des polynômes de M. Hermite.

Supposons que y_1 et y_2 soient des quantités *négatives* quelconques, prenons pour z le polynôme en x et y

$$z = V_\nu(x, y) = (-y)^{\frac{\nu}{2}} P_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right),$$

homogène et de degré ν en x et $\sqrt{y}$. Puis remarquons que, d'après la transformation homographique du n° **1**, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} V_\mu\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right) = y^{-\frac{\mu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} P_\mu\left(-\frac{x}{2\sqrt{y}}\right),$$

où μ désigne un entier positif, vérifie, comme z, l'équation $\delta z = 0$. Nous en concluons que la fonction, obtenue en changeant y de signe,

$$u = \frac{1}{\sqrt{-y}} e^{\frac{x^2}{4y}} V_\mu\left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) = (-y)^{-\frac{\mu+1}{2}} e^{\frac{x^2}{4y}} P_\mu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right),$$

vérifie l'équation adjointe $\delta' u = 0$, qui se déduit précisément de la proposée $\delta u = 0$ par le changement de y en $-y$.

Ces deux fonctions z et u sont finies, continues et admettent les dérivées figurant dans les équations, dans l'intérieur du rectangle ABCD, y_1 et y_2 étant négatifs, x' et x'' étant arbitraires. Nous pour-

rons donc appliquer, dans ces conditions, la formule (8). Supposons que, dans cette formule, on fasse croître x' jusqu'à $+\infty$ et décroître x'' jusqu'à $-\infty$. Les quantités

$$\left(u\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial u}{\partial x}\right)',\quad \left(u\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial u}{\partial x}\right)''$$

tendront vers zéro; en effet, à cause du facteur exponentiel $e^{\frac{x^2}{4y}}$, $(y<0)$, qui se trouve multiplié par des expressions algébriques en x, chacun des termes des produits

$$u\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial u}{\partial x}$$

tend vers zéro quand x devient $\pm\infty$.

Le second membre de la formule (8) tend donc vers zéro, et l'on a

$$(9)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(z_1u_1-z_2u_2)\,dx=0,$$

formule dans laquelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty}z_1u_1\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(-y_1)^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}e^{\frac{x^2}{4y_1}}\mathrm{P}_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y_1}}\right)\mathrm{P}_\mu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y_1}}\right)dx,$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}z_2u_2\,dx$ ayant une expression analogue où l'indice 1 est remplacé par 2. La formule ainsi obtenue exprime la propriété fondamentale des polynômes de M. Hermite. Faisons, en effet, dans l'intégrale ci-dessus, le changement de variable

$$x=-2\sqrt{-y_1}\,t;$$

nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty}z_1u_1\,dx=2(-y_1)^{\frac{\nu-\mu}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{P}_\nu(t)\,\mathrm{P}_\mu(t)\,dt;$$

nous aurons pour $\int_{-\infty}^{+\infty}z_2u_2\,dx$ une expression analogue, et la formule

(9) nous donnera

$$\left[(-y_1)^{\frac{\nu-\mu}{2}} - (-y_2)^{\frac{\nu-\mu}{2}}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{P}_\nu(t)\,\mathrm{P}_\mu(t)\,dt = 0;$$

d'où il résulte immédiatement que, si ν est différent de μ, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{P}_\nu(t)\,\mathrm{P}_\mu(t) = 0.$$

5. Voici une deuxième application de la formule (8), obtenue, comme nous l'avons vu, en prenant l'intégrale (7) le long du contour du rectangle ABCD (*fig.* 1).

Soit

$$z = f(x, y)$$

une intégrale de l'équation $\delta z = 0$, finie et continue, et admettant les dérivées qui figurent dans les formules pour toutes les valeurs de y comprises entre deux limites a et b ou égales à ces limites,

$$a \leqq y \leqq b,$$

c'est-à-dire pour tous les points du plan situés dans la bande comprise entre les parallèles $y = a$ et $y = b$ à l'axe Ox, et sur ces parallèles; supposons de plus que z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ restent finis quand x croît indéfiniment ou, si ces fonctions deviennent infinies, que leurs produits par une exponentielle de la forme $e^{-k^2x^2}$, k étant une constante arbitraire non nulle, tendent vers zéro, pour x infini. Nous prendrons pour u la fonction

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta - y}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta - y)}},$$

où η et ξ désignent deux constantes, η étant supposé supérieur à la plus grande valeur de y que nous allons considérer,

$$\eta > y_2;$$

cette fonction u vérifie l'équation $\delta' u = 0$; comme fonction de η et ξ, elle vérifie l'équation $\delta u = 0$. Nous pouvons alors appliquer la formule (8), en y supposant y_1 et y_2 compris entre a et b; nous aurons

$$\int_{x'}^{x''} (z_1 u_1 - z_2 u_2)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)' - \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)'' \right] dy.$$

Faisons croître x' indéfiniment et décroître x'' indéfiniment; le second membre tend vers zéro, et nous avons, comme plus haut, la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_1 u_1\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z_2 u_2\, dx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_1) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta - y_1)}} dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta - y_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_2) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta - y_2)}} dx.$$

Remplaçant η par y, ξ par x et la variable d'intégration x par λ, on peut dire que la fonction

$$(10) \qquad F(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4(y - y_1)}} d\lambda,$$

où $y > y_1$ est *indépendante* de y_1. On aura, en particulier, puisqu'on peut faire $y_1 = a$,

$$(10') \qquad F(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, a) e^{-\frac{(x - \lambda)^2}{4(y - a)}} d\lambda.$$

Or, quand y tend vers y_1, on sait (¹) que la première intégrale (10)

(¹) Cette propriété se trouve démontrée en toute rigueur dans le Mémoire de M. Weierstrass, *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen* (*Sitzungsberichte*, p. 803; 1885). On trouvera une traduction française de ce Mémoire dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan, t. II, p. 105.

qui donne $F(x, y)$ tend vers $f(x, y_1)$; on a donc la formule

$$(11) \qquad f(x, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y_1 - a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, a) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y_1 - a)}} d\lambda,$$

qui détermine la valeur de la fonction $f(x, y)$ dans l'intérieur de la bande considérée, quand on connaît la valeur de cette fonction sur le bord $y = a$.

Donc, dans les hypothèses faites sur la fonction $z = f(x, y)$ et ses dérivées, cette fonction se trouve déterminée par ses valeurs sur le bord inférieur $y = a$ de la bande considérée. Comme la formule (11) conserve un sens quelque grand que soit y_1, on peut prolonger la fonction en dehors de la bande en traversant la limite $y = b$, jusqu'à l'infini positif pour y.

La fonction $F(x, y)$ définie par les formules (10) et (10') est, d'après (11), égale à $f(x, y)$ et l'on a la formule

$$(12) \qquad f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4(y - y_1)}} dx,$$

où

$$y \geqq y_1,$$

formule indépendante de y_1, exprimant la valeur de la fonction pour $y > y_1$ à l'aide des valeurs qu'elle prend le long de la droite $y = y_1$. On emploie ces formules dans la Théorie de la chaleur, en laissant de côté la condition relative à $\frac{\partial z}{\partial x}$.

6. *Une fonction uniforme $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z = 0$, existant dans toute la partie du plan située* au-dessous *d'une certaine parallèle à l'axe Ox, $y \leqq b$, et restant* finie, *ainsi que sa dérivée par rapport à x, dans cette partie du plan, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x et y, se réduit à* une constante. (La dérivée par rapport à x peut même devenir infinie avec x, pourvu qu'elle se comporte comme on l'a supposé dans le n° 5.)

Dans cette hypothèse, la bande considérée dans le numéro précédent s'étend jusqu'à $y = -\infty$ et l'on a, d'après la formule (12) dans

laquelle on donne successivement à x deux valeurs distinctes x et x'

$$f(x,y)-f(x',y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,y_1)\left[e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}}-e^{-\frac{(x'-\lambda)^2}{4(y-y_1)}}\right]d\lambda,$$

y_1 désignant une valeur quelconque inférieure à b, et y étant supérieur à y_1.

Nous allons conclure de cette formule, en donnant à y_1 des valeurs négatives de plus en plus grandes, que la différence $f(x,y)-f(x',y)$ est, en valeur absolue, plus petite que tout nombre positif, et, par suite, qu'elle est nulle.

Supposons $x>x'$, la fonction de λ

$$\varphi(\lambda)=e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}}-e^{-\frac{(x'-\lambda)^2}{4(y-y_1)}},$$

où $y>y_1$ s'annule pour $\lambda=\frac{x+x'}{2}$. Elle est négative pour $\lambda<\frac{x+x'}{2}$, positive pour $\lambda>\frac{x+x'}{2}$. Appelons M un nombre positif plus grand que la plus grande valeur absolue que prend la fonction $f(x,y)$ quand on donne à x et y toutes les valeurs finies et infinies au-dessous de $y=b$; ce nombre M existe par hypothèse. Nous pouvons écrire

$$f(x,y)-f(x',y)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}}\left[\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}}f(\lambda,y_1)\varphi(\lambda)\,d\lambda+\int_{\frac{x+x'}{2}}^{+\infty}f(\lambda,y_1)\varphi(\lambda)\,d\lambda\right].$$

Dans la première intégrale du second membre $\varphi(\lambda)$ est négatif; cette intégrale est en valeur absolue moindre que

$$-\mathrm{M}\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}}\varphi(\lambda)\,d\lambda;$$

la deuxième est moindre, en valeur absolue, que

$$\mathrm{M}\int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

On a donc

$$|f(x,y)-f(x',y)| < \frac{M}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}}\left[-\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}} \varphi(\lambda)\,d\lambda + \int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty} \varphi(\lambda)\,d\lambda\right].$$

Dans la première des intégrales du second membre, faisons

$$\lambda = \frac{x+x'}{2} - \mu, \qquad \frac{x-x'}{2} = t$$

et, dans la seconde,

$$\lambda = \frac{x+x'}{2} + \mu,$$

nous aurons, pour ces deux intégrales, la même valeur

$$-\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}}\right]d\mu,$$

d'où

$$|f(x,y)-f(x',y)| < \frac{M}{\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}}\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}}\right]d\mu;$$

mais on a, en faisant successivement $\mu = t + \rho$ et $\mu = -t + \rho$,

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}}d\mu = \int_{-t}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{4(y-y_1)}}d\rho,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}}d\mu = \int_{t}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{4(y-y_1)}}d\rho;$$

d'où, en retranchant,

$$\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}}\right]d\mu = \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{\rho^2}{4(y-y_1)}}d\rho.$$

Cette dernière intégrale est moindre que $2t$, car l'élément différentiel est moindre que 1; on a donc enfin

$$|f(x,y)-f(x',y)| < \frac{2Mt}{\sqrt{\pi(y-y_1)}}.$$

Or, en faisant croître y_1 indéfiniment par valeurs négatives, on rendra le second membre plus petit que tout nombre positif donné, si petit qu'il soit.

On a donc

$$f(x, y) - f(x', y) = 0,$$

quels que soient x, x' et y; la fonction $z = f(x, y)$ est donc indépendante de x; l'équation $\delta z = 0$ montre alors qu'elle est indépendante de y : elle est donc *constante*.

7. Considérons une fonction $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z = 0$ et uniforme dans une certaine région du plan. Convenons d'appeler *point singulier de la fonction* un point où cette fonction ou sa dérivée $\frac{dz}{dx}$ cesse d'être finie et déterminée. D'après ce qui précède, une fonction uniforme pour toutes les valeurs de y *inférieures* à une certaine limite a nécessairement pour ces valeurs des singularités à distance finie ou infinie : il peut arriver, au contraire, qu'une fonction uniforme pour toutes les valeurs de y *supérieures* à une certaine limite n'ait aucune singularité pour ces valeurs.

Par exemple, la fonction

$$z = \frac{1}{\sqrt{-y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

est uniforme pour toutes les valeurs de y inférieures à un nombre négatif donné; elle devient infinie avec x, y étant négatif.

Au contraire,

$$z = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

est uniforme pour les valeurs de y supérieures à un nombre positif donné; pour ces valeurs, elle n'a aucun point singulier à distance finie ou infinie. Les deux fonctions prises comme exemples n'existent pas dans tout le plan; elles admettent comme ligne de points singuliers l'axe $y = 0$.

Soient a, b et c des constantes réelles : la partie réelle de

$$\frac{a+bi}{\sqrt{y-ci}}\, e^{-\frac{x^2}{4(y-ci)}}$$

est une fonction de x et y, existant dans tout le plan, uniforme dans tout le plan et vérifiant l'équation $\hat{\partial} z = 0$: elle devient infinie à l'infini pour des valeurs *négatives* de y.

On peut faire une remarque analogue sur la fonction formée par la partie réelle de

$$(a+bi)e^{kx+k^2y},$$

k étant une constante *imaginaire* ou *réelle*.

8. Il est intéressant de remarquer que l'équation $\hat{\partial} z = 0$ ne peut pas admettre de solution uniforme dans tout le plan, n'ayant aucun point singulier à l'infini, et ayant un seul point singulier $x = a$, $y = b$ à distance finie; en effet, une telle fonction serait constante pour toutes les valeurs de y *inférieures* à b.

Il y a donc là une différence remarquable avec les équations linéaires dans le cas elliptique qui admettent des intégrales avec un seul point singulier; par exemple,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

admet l'intégrale

$$z = \frac{x}{x^2+y^2},$$

qui a comme seul point singulier l'origine.

9. La plupart des solutions simples de l'équation $\hat{\partial} z = 0$ admettent des lignes de discontinuité parallèles à Ox. La transformation homographique (2) fait aussi apparaître des lignes de cette nature. On les retrouve encore en cherchant des solutions de l'une des deux formes suivantes :

1° Cherchons l'expression la plus générale d'une solution qui soit une série entière en x

$$z = A_0 + \frac{A_1}{1} x + \frac{A_2}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n} x^n + \ldots,$$

les coefficients A_n étant des fonctions de y. Substituant dans l'équation $\delta z = 0$, on trouve immédiatement

$$A_n = \frac{dA_{n-2}}{dy}.$$

Donc en posant

$$A_0 = \varphi(y), \qquad A_1 = \psi(y),$$

$$A_{2n} = \frac{d^n \varphi(y)}{dy^n}, \qquad A_{2n+1} = \frac{d^n \psi(y)}{dy^n};$$

ce qui donne la solution

$$z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \frac{d^n \varphi(y)}{dy^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \frac{d^n \psi(y)}{dy^n}.$$

En remplaçant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par des polynômes en y, on retrouve des solutions composées avec les polynômes $V_\nu(x, y)$; en remplaçant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par des fractions rationnelles en y, on obtient des solutions qui admettent pour *coupures* ou lignes de points *singuliers* les droites parallèles à l'axe Ox sur lesquelles les fractions rationnelles deviennent *infinies*.

La solution la plus générale, développable en série entière de y, est de même

$$z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^n}{1.2\ldots n} \frac{d^{2n} \varphi(x)}{dx^{2n}};$$

mais, si l'on voulait faire apparaître des coupures parallèles à Oy en remplaçant $\varphi(x)$ par une fonction rationnelle en x, la série serait *divergente* dès que $\varphi(x)$ ne serait plus un simple polynôme [1].

---

[1] Par exemple, en remplaçant $\varphi(x)$ par $\frac{1}{1-x}$, on retrouverait la série di-

2° Soient α et β deux constantes positives, $g(x, y)$ et $h(x, y)$ deux fonctions de x et y finies continues et admettant les dérivées premières et secondes qui figurent dans les équations, dans une certaine région du plan; ces fonctions g et h pourront être, par exemple, des séries entières en x et y. Voyons s'il est possible de vérifier l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

en prenant

$$z = \frac{[g(x, y)]^\alpha}{[h(x, y)]^\beta} = g^\alpha h^{-\beta}.$$

L'équation devient, après simplification,

$$gh(\alpha h\, \delta g - \beta g\, \delta h) + \alpha(\alpha - 1)\, h^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - 2\alpha\beta gh \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \beta(\beta + 1)\, g^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Si la fonction $h(x, y)$ s'annule dans la portion du plan considérée, la fonction z admet comme ligne singulière la courbe

$$h(x, y) = 0.$$

Or, d'après l'équation ci-dessus, pour un point de cette courbe on a nécessairement

$$g^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

d'où, en supposant g différent de zéro,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Donc, en tout point simple de la courbe $h = 0$ qui n'annule pas g,

---

vergente qui se présente dans l'exemple de Mme Kovalewski (*Journal de Crelle*, t. 80, p. 22).

la tangente est parallèle à l'axe Ox. Cette courbe est donc formée de points isolés et de *parallèles à l'axe* Ox : on retrouve donc ainsi les lignes singulières formées de parallèles à l'axe Ox.

10. *Application à la Théorie de la chaleur.* — Un grand nombre de problèmes relatifs à la propagation de la chaleur se ramènent à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dans laquelle k désigne une constante positive, t le temps, x une coordonnée et u la température, fonction de x et de t; cette équation se ramène à la forme $\delta u = 0$ par la substitution $kt = y$.

Si l'on suppose la température u donnée par une fonction $f(x)$ à un certain instant initial t_0, les formules de Fourier permettent de calculer u à tous les instants t qui suivent t_0, $t > t_0$. M. Boussinesq m'ayant engagé à examiner si l'état initial donné peut être considéré comme provenant d'un état calorifique *antérieur*, $t < t_0$, je me suis d'abord occupé du cas simple de la propagation de la chaleur dans une armille (Fourier, *Théorie de la chaleur*, Chap. IV) et les résultats ont confirmé les indications que m'avait données M. Boussinesq sur la nature probable de la solution. Nous reprendrons d'abord ce cas particulier en y ajoutant quelques remarques, puis nous traiterons le cas général.

11. *Armille.* — Prenons pour unité le rayon de l'armille et appelons x l'arc de circonférence compté à partir d'un point fixe : la température u est évidemment une fonction de x admettant pour période la longueur 2π de la circonférence.

Supposons que, pour $t = t_0$, u ait une valeur donnée exprimée par une fonction $f(x)$ finie continue admettant la période 2π; d'après Fourier, cette fonction sera développable en une série de la forme

$$(13)\quad f(x) = b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \ldots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \ldots$$

et la température u à l'instant $t > t_0$ sera

$$(14) \quad \begin{cases} u = b_0 + e^{-k(t-t_0)}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \ldots \\ \qquad + e^{-n^2 k(t-t_0)}(a_n \sin nx + b_n \cos nx + \ldots, \end{cases}$$

série évidemment convergente pour $t > t_0$.

Nous ferons sur cette solution les deux remarques suivantes :

1° Comme le montre M. Weierstrass dans ses articles *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen* (1) (traduits dans le tome II du Journal de M. Jordan), la fonction u représentée par la série (14) où $t > t_0$ est une fonction entière de x développable, pour toutes les valeurs de x, en série procédant suivant les puissances entières positives de x.

2° Si l'on donne à t une valeur déterminée t_1, supérieure à t_0, u devient une fonction $f_1(x)$ représenté par la série

$$(15) \quad \begin{cases} f_1(x) = b_0 + e^{-k(t_1-t_0)}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \ldots \\ \qquad + e^{-n^2 k(t_1-t_0)}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \ldots. \end{cases}$$

L'état initial $u = f(x)$, donné pour l'armille, est le *seul* qui, de l'instant t_0 à l'instant t_1 conduise à la température $f_1(x)$; en effet, une fonction étant développable d'une seule manière en série trigonométrique, du développement de $f_1(x)$ en série trigonométrique identifié avec (15), on déduit un seul système de valeurs pour les coefficients a_n et b_n.

Ces deux remarques donnent les résultats suivants :

1° Une certaine distribution de température de l'armille, $u_1 = f_1(x)$, donnée en fonction de x à un instant t_1, ne provient pas nécessairement d'un état antérieur; pour qu'il existe un état antérieur il *faut* que la température donnée, $f_1(x)$, soit une *fonction transcendante entière* de x; condition qui n'est, d'ailleurs, pas suffisante.

---

(1) *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885, p. 803. Ces recherches de M. Weierstrass ont été étendues par M. Sommerfeld au cas où la fonction réelle $f(x)$ est discontinue ou même infinie (*Inaugural Dissertation*, Königsberg, 1891).

2° Si l'état antérieur existe, il est *unique*, et se trouve déterminé par la série même de Fourier. Pour reconnaître si l'état antérieur existe, il suffira donc de voir si la série de Fourier converge pour des valeurs de t inférieures à la valeur initiale du temps.

Par exemple, si l'état initial est

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^4} \cos nx,$$

transcendante entière en x analogue à une fonction θ, l'état antérieur existe, car la série

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^4 - n^2 k(t-t_0)} \cos nx$$

converge pour $t < t_0$, et cela quel que soit t; on peut donc remonter indéfiniment dans le *passé*. Il faut cependant remarquer que, quand t devient infiniment grand négatif, les termes de u augmentent indéfiniment, ce qu'on pouvait prévoir, car nous avons vu qu'il ne peut pas exister de solution de l'équation $\delta z = 0$ finie pour toutes les valeurs de y inférieures à une certaine limite.

Si l'état initial est

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^{\frac{3}{2}}} \cos nx,$$

ce qui est encore une transcendante entière en x, l'état antérieur n'existe pas, car la série

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^{\frac{3}{2}} - n^2 k(t-t_0)} \cos nx$$

diverge pour $t < t_0$ [1].

---

[1] La Théorie de la chaleur fournit ainsi des exemples de fonctions possédant des propriétés analogues à celles que M. Fredholm a signalées (*Acta mathematica*, t. XV, p. 279).

12. *Cas général.* — Remplaçons kt par y, de façon à ramener l'équation de la chaleur à la forme

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Supposons que l'on se donne la valeur

$$u_0 = f(x)$$

de u pour $y = y_0$, la fonction $f(x)$ étant finie continue, et restant, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x, inférieure en valeur absolue à un nombre positif déterminé. D'après les formules connues ([1]), la température u devient, pour $t > t_0$, $y > y_0$

$$(16) \qquad u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_0)}} d\lambda.$$

En particulier, à un instant déterminé $t_1 > t_0$, $y_1 > y_0$, on a

$$(17) \qquad u_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y_1 - y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y_1-y_0)}} d\lambda.$$

M. Weierstrass montre ([2]) que u_1 est encore une fonction transcendante entière de x. Nous retrouvons donc, dans le cas général, la condition déjà trouvée dans le cas de l'armille. Pour qu'un état donné $u_1 = f_1(x)$, $f_1(x)$ étant finie et continue, provienne d'un état antérieur, il faut que $f_1(x)$ soit une fonction *transcendante entière de x*; cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante, comme nous l'avons vu par un exemple dans le cas de l'armille.

13. Si l'état antérieur existe, on peut se demander s'il est *unique*. Cela est en quelque sorte évident, si l'on fait intervenir des considérations de Physique mathématique. En effet, pour remonter d'un état

---

([1]) *Voir*, par exemple, Riemann, *loc. cit.*, p. 109.

([2]) *Loc. cit.*

actuel à un état antérieur, il suffit de faire passer la chaleur des parties plus froides aux parties plus chaudes, suivant les lois inverses des lois du mouvement de la chaleur : on obtient ainsi un état antérieur unique, si cet état est possible. Nous pouvons démontrer ce fait analytiquement de la façon suivante. Supposons qu'il existe deux fonctions vérifiant l'équation $\delta u = 0$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, finies continues pour toutes les valeurs de y supérieures à un nombre donné négatif $-a$ et devenant identiques pour $y = 0$ et, par suite, pour $y > 0$; il s'agit de prouver que ces fonctions sont aussi identiques pour y compris entre 0 et $-a$.

La fonction

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

vérifie l'équation $\delta u = 0$, et est nulle pour toutes les valeurs de y supérieures ou égales à zéro ; il s'agit de montrer qu'elle est nulle pour y compris entre 0 et $-a$. Nous avons démontré que la fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4(y-y_1)}} d\lambda$$

est indépendante de y_1, y étant $> y_1$ et $y_1 > -a$. Faisons $y_1 = y - c$, c positif, la fonction

$$(18) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y-c) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4c}} d\lambda$$

est indépendante de c. Partant de cette formule, nous allons montrer que $u(x, y)$ est identiquement nulle pour $y = -\frac{a}{6}$ et, par suite, pour toutes les valeurs de y supérieures à $-\frac{a}{6}$.

En effet, dans la formule ci-dessus (18), supposons $y > 0$, $0 < c < a$, nous aurons, par hypothèse,

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y-c) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4c}} d\lambda,$$

quels que soient x, y, c. Multiplions les deux membres par

$$u(x, \eta - c)\,dx,$$

η étant tel que $\eta - c > -a$, puis intégrons par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$.

Comme l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, \eta - c)\,e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4c}}\,dx$$

est, d'après la formule (18), où l'on changerait x en λ et λ en x, égale à

$$u(\lambda, \eta),$$

on aura

$$0 = \int_{-}^{+\infty} u(\lambda, y - c)\,u(\lambda, \eta)\,d\lambda.$$

Faisons, pour avoir un résultat précis,

$$c = \frac{a}{3}, \qquad y = \frac{a}{6}, \qquad \eta = -\frac{a}{6}, \qquad y - c = -\frac{a}{6};$$

toutes les conditions supposées seront remplies,

$$c > 0, \qquad y > 0, \qquad \eta - c > -a,$$

et l'on aura

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u\left(\lambda, -\frac{a}{6}\right)\right]^2 d\lambda,$$

ce qui exige évidemment $u\left(\lambda, -\frac{a}{6}\right) = 0$.

Nous avons donc réduit de $\frac{1}{6}$ l'intervalle dans lequel la fonction u n'est pas identiquement nulle; on réduira de même le nouvel intervalle de $\frac{1}{6}$, etc., et l'on arrivera à montrer que la fonction $u(x, y)$ est nulle jusqu'à une distance aussi petite qu'on le veut de la droite $y = -a$.

14. Il reste, dans cet ordre d'idées, une question à résoudre. En

supposant qu'on donne pour $y = 0$ une fonction transcendante entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dont la valeur absolue reste finie pour $x = \pm\infty$, reconnaître s'il existe une solution $u(x, y)$ de l'équation $\delta u = 0$, *finie pour des valeurs négatives* de y et se réduisant à $f(x)$ pour $y = 0$, et former cette fonction si elle existe. Voici la méthode qui paraît la plus simple pour résoudre cette question.

Supposons que la fonction $u(x, y)$ existe pour les valeurs négatives de y depuis $y = 0$ jusqu'à la valeur négative $y = -a$ *inclusivement*, $a > 0$.

D'après les formules connues de la théorie de la chaleur, précédemment rappelées, cette fonction $u(x, y)$ est donnée pour toutes les valeurs de y supérieures à $-a$ par la formule

$$(19) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y + a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, -a)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y+a)}}\, d\lambda,$$

expression qui doit, en particulier, se réduire à la valeur donnée $f(x)$, pour $y = 0$. La fonction $u(x, y)$ définie par la formule (19), dans laquelle $y > -a$, est une fonction transcendante entière de x développable en une série de puissances entières et positives de x, convergente quel que soit x; cette même fonction $u(x, y)$ est une fonction de y qui, pour les valeurs de y dont la valeur absolue est moindre que a,

$$-a < y < a,$$

est développable en une série procédant suivant les puissances entières et positives de y. Donc, pour ces valeurs de y, la température $u(x, y)$ est développable en une série entière en x, dont les coefficients sont des séries entières en y; elle est donc, comme nous l'avons vu, n° 9, de la forme

$$(20) \qquad u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \frac{d^n \varphi(y)}{dx^n} + \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \frac{d^n \psi(y)}{dx^n},$$

où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des séries entières en y.

En identifiant la forme de ce développement pour $y = 0$ avec le développement de $f(x)$, on a

$$a_{2n} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1.2\ldots 2n}, \qquad a_{2n+1} = \frac{\psi^{(n)}(0)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Alors, d'après la formule de Maclaurin qui est applicable, puisque $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des séries entières convergentes pour $-a < y < a$, on a

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.2\ldots 2n}{1.2\ldots n} a_{2n} y^n,$$

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.2\ldots(2n+1)}{1.2\ldots n} a_{2n+1} y^n.$$

Les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ étant ainsi déterminées, pour que l'état antérieur existe, jusqu'à la valeur $y = -a$, il faudra que la série (20) soit convergente pour y compris entre $-a$ et $+a$ [1].

Prenons par exemple

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1.2\ldots n}.$$

Alors

$$\psi(y) = 0, \qquad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1.2\ldots 2n}{(1.2\ldots n)^2} y^n$$

ou

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n-1)}{1.2\ldots n} (4y)^n,$$

$$\varphi(y) = (1+4y)^{-\frac{1}{2}};$$

---

[1] Mme Kowalevski a examiné les conditions de convergence dans son Mémoire du *Journal de Crelle*, t. 80.

la série (20) donne ensuite

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+4y}} e^{-\frac{x^2}{1+4y}},$$

fonction qui existe depuis $y = 0$ jusqu'à $y = -\frac{1}{4}$ exclusivement.

15. Lorsque l'état antérieur existe, il est impossible que la température

$$u(x, y), \qquad (y = kt)$$

soit finie pour toute valeur finie et infinie de x et t, t étant négatif, à moins que la température ne soit constante. En d'autres termes, si la température u n'est pas constante, *on ne peut pas remonter indéfiniment dans le passé*, sans que la fonction u qui représente la température devienne infinie ou cesse d'exister, *au moins pour* $t = -\infty$.

En effet, soit $u(x, y_1)$ la température à un instant t_1, $y_1 = kt_1$, on a, d'après Fourier, pour $t > t_1$, $y > y_1$,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y_1) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}} d\lambda,$$

expression indépendante de y_1. En supposant que, pour toutes les valeurs de λ et les valeurs négatives de y_1, quelque grandes qu'elles soient, la température $u(\lambda, y_1)$ reste inférieure en valeur absolue à une limite fixe, on démontrera, à l'aide de cette formule, comme on l'a fait dans le n° 6, que la fonction $u(x, y)$ est *constante*. Donc, en exceptant ce dernier cas, on ne peut pas remonter à un état antérieur indéfiniment reculé dans le passé, *la fonction u restant finie pour* $t = -\infty$.

Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe;

PAR M. ÉMILE PICARD.

La théorie des fonctions d'une variable complexe n'est autre chose que l'étude des fonctions réelles P et Q des deux variables réelles x et y satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Le problème de généraliser ces équations est évidemment indéterminé, et l'on peut tenter cette généralisation dans bien des directions différentes. Attachons-nous particulièrement à la propriété suivante de ce système : si (P, Q) d'une part et (P_1, Q_1) d'autre part sont deux solutions quelconques, P_1 et Q_1 considérées comme fonction de P et Q satisferont aux mêmes équations, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial P_1}{\partial P} = \frac{\partial Q_1}{\partial Q},$$
$$\frac{\partial P_1}{\partial Q} = -\frac{\partial Q_1}{\partial P}.$$

C'est cette propriété que nous voulons prendre comme propriété fondamentale des systèmes que nous allons nous proposer de former.

Nous pouvons formuler le problème suivant :

Trouver un système de m équations ($m > n$) contenant uniquement les dérivées partielles du premier ordre de n fonctions P_1, $P_2, \ldots, P_n$ *dépendant de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial x_n}, \frac{\partial P_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et telles que, si l'on considère un second système également arbitraire de solutions $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, *les fonctions* P *considérées comme fonctions des* Q *satisfassent aux mêmes équations, c'est-à-dire que*

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial Q_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial Q_n}, \frac{\partial P_2}{\partial Q_n}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial Q_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous allons montrer d'abord comment on peut former tous les systèmes jouissant de cette propriété. Pour simplifier, j'ai supposé que les équations ne renfermaient que les dérivées partielles du premier ordre; on peut supposer d'une manière plus générale que *les dérivées partielles d'ordre quelconque figurent dans les équations;* la formation des équations pourra se déduire des mêmes principes, comme nous le verrons après avoir étudié le cas simple que nous venons d'abord d'indiquer.

J'ai voulu traiter complètement le cas de *deux* et de *trois* variables et former tous les systèmes de la forme précédente, où figurent les dérivées partielles du premier ordre. Le nombre de ces systèmes pour $n = 3$ est assez considérable et il ne paraît pas qu'il y en ait parmi eux de réellement important, je veux dire qu'il ne me semble pas que pour aucun d'eux on puisse développer une théorie plus ou moins analogue à celle des fonctions d'une variable complexe. Je ne crois pas inutile cependant de développer rapidement la solution du problème que j'ai posé et d'indiquer quelques exemples. D'après quelques essais, il me paraît probable que le cas de $n = 4$ pourra conduire à des résultats plus intéressants, mais je dois avouer que le courage m'a manqué

pour entreprendre les énormes calculs que nécessiterait l'étude complète de ce cas.

I. — Formation des équations du premier ordre.

1. La formation des équations du premier ordre jouissant de la propriété d'invariance qui est notre point de départ se ramène facilement à la théorie des groupes linéaires de transformation. Nous allons seulement, pour simplifier, faire l'hypothèse que les équations sont vérifiées pour

$$P_1 = x_1, \qquad P_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad P_n = x_n,$$

hypothèse qui ne diminue d'ailleurs en rien la généralité de notre recherche. Une première conséquence de cette hypothèse est que, si l'on prend une solution arbitraire

$$Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

les équations

$$\begin{gathered} Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_1, \\ Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_n \end{gathered}$$

définissent des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, satisfaisant au système d'équations différentielles.

Ceci posé, partons des relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} dP_1 &= \sum \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\, dx_i, \\ dP_2 &= \sum \frac{\partial P_2}{\partial x_i}\, dx_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dP_n &= \sum \frac{\partial P_n}{\partial x_i}\, dx_i; \end{aligned} \right.$$

et

$$(2) \qquad \begin{cases} dx_1 = \sum \frac{\partial x_1}{\partial Q_i} dQ_i, \\ dx_2 = \sum \frac{\partial x_2}{\partial Q_i} dQ_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dx_n = \sum \frac{\partial x_n}{\partial Q_i} dQ_i. \end{cases}$$

Les dérivées $\frac{\partial P_k}{\partial x_i}$ d'une part, et les dérivées $\frac{\partial x_k}{\partial Q_i}$ d'autre part satisfont aux mêmes relations $f = 0$ d'après ce que nous venons de dire. En considérant d'autre part les P comme fonctions des Q,

$$(3) \qquad \begin{cases} dP_1 = \sum \frac{\partial P_1}{\partial Q_i} dQ_i, \\ dP_2 = \sum \frac{\partial P_2}{\partial Q_i} dQ_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dP_n = \sum \frac{\partial P_n}{\partial Q_i} dQ_i \end{cases}$$

et les dérivées $\frac{\partial P_k}{\partial Q_i}$ satisfont aux mêmes relations $f = 0$. Or on obtient les relations (3) en portant dans les équations (1) les valeurs des dx données par les équations (2). On peut donc dire que les relations (1) définissent *un groupe de substitutions linéaires* relatives à dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$, car le produit des deux substitutions (1) et (2) pour lesquelles les coefficients des indéterminées satisfont aux relations $f = 0$ donne une nouvelle substitution, la substitution (3) satisfaisant aux mêmes conditions. Il résulte immédiatement des résultats précédents que les équations $f = 0$ pourront être obtenues comme il suit : *On prend un groupe quelconque de substitutions linéaires à n variables contenant la substitution unité*

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

les a dépendant d'un certain nombre p de paramètres ($p < n^2$); *on pose*

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_i} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'élimination des p paramètres, dont dépendent les a, entre ces n^2 équations conduira à $n^2 - p$ équations entre les dérivées partielles du premier ordre de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Ce sont les relations cherchées [1].

2. On voit que la formation des équations $f = 0$ se ramène à la recherche des groupes linéaires et homogènes; c'est là un problème classique dans les travaux de M. Lie. Il y aura donc tout au moins à partir de $n = 3$ un très grand nombre de types d'équations; nous allons tout à l'heure en indiquer un certain nombre. Pour $n = 2$, un groupe s'offre immédiatement

$$X = \quad ax + by,$$
$$Y = - bx + ay,$$

avec les deux paramètres a et b. On devra poser, d'après la règle

$$\frac{\partial P}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = b, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = - b, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = a.$$

L'élimination de a et b donne les équations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ce sont les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

II. — Formation des équations d'ordre supérieur.

3. La méthode que nous venons de suivre n'est pas limitée aux équations où les dérivées partielles du premier ordre figurent seules

---

[1] J'ai énoncé pour la première fois ce résultat dans une Note des *Comptes rendus* (juin 1891).

dans les équations. L'extension sera suffisamment indiquée, en nous bornant aux équations du second ordre et aux cas de deux variables indépendantes. Appelons P et Q les deux fonctions, x et y les deux variables indépendantes; on suppose toujours les équations vérifiées pour $P = x$, $Q = y$.

On a, sans spécifier les variables,

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
dP &= \frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy,\\
dQ &= \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy,\\
d^2P &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy\\
&\qquad + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial P}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial P}{\partial y}\,d^2y,\\
d^2Q &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy\\
&\qquad + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial Q}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,d^2y,
\end{aligned}
\right.
$$

et les quatre équations analogues relatives à une autre solution (P_1, Q_1); d'ailleurs, d'après la remarque faite plus haut, x et y considérées comme fonction de P_1 et Q_1 forment une solution du système que nous cherchons. Écrivons les relations

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial x}{\partial Q_1}\,dQ_1,\\
dy &= \frac{\partial y}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial y}{\partial Q_1}\,dQ_1,\\
d^2x &= \frac{\partial^2 x}{\partial P_1^2}\,dP_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial P_1\,\partial Q_1}\,dP_1\,dQ_1\\
&\qquad + \frac{\partial^2 x}{\partial Q_1^2}\,dQ_1^2 + \frac{\partial x}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial x}{\partial Q_1}\,dQ_1,\\
d^2y &= \frac{\partial^2 y}{\partial P_1^2}\,dP_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial P_1\,\partial Q_1}\,dP_1\,dQ_1\\
&\qquad + \frac{\partial^2 y}{\partial Q_1^2}\,dQ_1^2 + \frac{\partial y}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial y}{\partial Q_1}\,dQ_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, en considérant P et Q comme fonctions de P_1 et Q_1, on a

$$
(6)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P}d &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{P}_1}\, d\mathrm{P}_1 + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{Q}_1}\, d\mathrm{Q}_1,\\
d\mathrm{Q} &= \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}_1}\, d\mathrm{P}_1 + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{Q}_1}\, d\mathrm{Q}_1,\\
d^2\mathrm{P} &= \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \mathrm{P}_1^2}\, d\mathrm{P}_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \mathrm{P}_1\,\partial \mathrm{Q}_1}\, d\mathrm{P}_1\, d\mathrm{Q}_1\\
&\quad + \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \mathrm{Q}_1^2}\, d\mathrm{Q}_1^2 + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{P}_1}\, d^2\mathrm{P}_1 + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{Q}_1}\, d^2\mathrm{Q}_1,\\
d^2\mathrm{Q} &= \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}_1^2}\, d\mathrm{P}_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}_1\,\partial \mathrm{Q}_1}\, d\mathrm{P}_1\, d\mathrm{Q}_1\\
&\quad + \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{Q}_1^2}\, d\mathrm{Q}_1^2 + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}_1}\, d^2\mathrm{P}_1 + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{Q}_1}\, d^2\mathrm{Q}_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Les coefficients des différentielles dans les équations (4), (5), (6) satisfont aux mêmes relations; or les équations (6) peuvent être considérées comme provenant de la multiplication des substitutions (4) et (5) effectuées sur les différentielles $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d^2\mathrm{P}$, $d^2\mathrm{Q}$ et $d\mathrm{P}_1$, $d\mathrm{Q}_1$, $d^2\mathrm{P}_1$, $d^2\mathrm{Q}_1$. Nous voyons donc que l'on aura un système d'équations cherchées en procédant de la manière suivante :

On prend un groupe de transformations, relatives à x, y, z et t de la forme suivante

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= ax + by,\\
\mathrm{Y} &= cx + dy,\\
\mathrm{Z} &= \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + az + bt,\\
\mathrm{T} &= \mathrm{D}x^2 + 2\mathrm{E}xy + \mathrm{F}y^2 + cz + dt,
\end{aligned}
\right.
$$

et contenant la substitution unité. Soit p le nombre des paramètres de ce groupe ($p < 10$); on posera

$$
\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = a,\qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = b,\qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = c,\qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = d,
$$

$$
\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x^2} = \mathrm{A},\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{B},\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial y^2} = \mathrm{C},
$$

$$
\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial x^2} = \mathrm{D},\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{E},\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial y^2} = \mathrm{F}.
$$

L'élimination des paramètres entre ces *dix* équations nous donnera un système de $10 - p$ équations, qui seront les équations cherchées.

4. Les groupes de la forme (7) n'ont, je crois, fait l'objet d'aucune étude spéciale, nous voudrions seulement indiquer un exemple. On obtiendra un groupe de la forme (7) en cherchant les substitutions qui transforment en elle-même à un coefficient près une forme donnée

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta z + \varepsilon t.$$

On aura donc

$$\alpha X^2 + 2\beta XY + \gamma Y^2 + \delta Z + \varepsilon T = \lambda(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta z + \varepsilon t).$$

On peut encore dire que les fonctions P et Q correspondant à ce groupe sont telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} &\alpha\, dP^2 + 2\beta\, dP\, dQ + \gamma\, dQ^2 + \delta\, d^2P + \varepsilon\, d^2Q \\ &\quad = \lambda(\alpha\, dx^2 + 2\beta\, dx\, dy + \gamma\, dy^2 + \delta\, d^2x + \varepsilon\, d^2y). \end{aligned}$$

Effectuons les calculs en supposant que la forme se réduise à

$$dP^2 + dQ^2 + \delta(d^2P + d^2Q),$$

ce que l'on peut toujours supposer, en faisant préalablement sur P et Q une substitution linéaire convenable. On aura, en supposant δ différent de zéro,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= \lambda, \\ \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= \lambda, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \delta\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) &= \lambda, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \delta\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right) &= \lambda, \\ \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} + \delta\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}\right) &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant λ on aura *quatre équations*.

Ces quatre équations n'ont malheureusement, en dehors de P et Q constants, d'autres solutions que

$$P = x, \qquad Q = y.$$

III. — Équations du premier ordre a deux variables.

5. Un système de deux équations du premier ordre à deux variables s'obtiendra en partant du groupe linéaire à deux variables et à deux paramètres. Prenons le groupe sous sa forme la plus simple, mais en ayant soin de n'introduire aucun élément imaginaire.

On peut d'abord prendre les deux transformations infinitésimales du groupe sous la forme

$$(8) \qquad \begin{cases} A(f) = ax\dfrac{\partial f}{\partial x} + (cx + dy)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ B(f) = (\alpha x + \beta y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (\gamma x + \delta y)\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Le cas de $\beta = 0$ n'offre aucun intérêt. Supposons donc $\beta \neq 0$, nous pouvons admettre, en faisant une combinaison linéaire de A et de B, que $\alpha = 0$.

Nous partons donc de

$$A(f) = ax\frac{\partial f}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$B(f) = \beta y\frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma x + \delta y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On doit avoir

$$(9) \qquad A[B(f)] - B[A(f)] = \lambda B(f) + \mu A(f).$$

Si λ et μ sont nuls, c'est-à-dire si les deux substitutions infinitésimales du groupe sont permutables, on a

$$c\beta = 0,$$
$$(d - a)\beta = 0,$$
$$(a - d)\gamma + c(\delta - \alpha) = 0,$$
$$-c\beta = 0.$$

On a donc $d = a$, $c = 0$, et l'on voit de suite que le groupe correspondant se ramène à celui qui conduit aux équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

6. Le seul cas nouveau est celui où les deux substitutions ne sont pas permutables. Reprenons les formes (8). Si λ n'est pas nul, en remplaçant $B(f)$ par $B(f) - \frac{\mu}{\lambda} A(f)$, on n'aura plus de terme en $A(f)$ dans le second membre de (9). On peut donc partir des deux transformations (8) en supposant que

$$A[B(f)] - B[A(f)] = \lambda B(f).$$

On aura ainsi les relations

$$c\beta = \lambda\alpha,$$
$$(d-a)\beta = \lambda\beta,$$
$$\alpha\gamma + c(\delta - \alpha) - d\gamma = \lambda\gamma,$$
$$-c\beta = \lambda\delta,$$

que l'on peut encore écrire

$$(10)\qquad \begin{cases} \lambda = d - a, \\ \alpha + \delta = 0, \\ (d-a)\gamma = c\delta, \\ (d-a)\alpha = c\beta. \end{cases}$$

Cherchons maintenant les équations finies du groupe. On doit considérer les équations linéaires

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\lambda_1 x + \lambda_2(\alpha x + \beta y), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \lambda_1(cx + dy) + \lambda_2(\gamma x + \delta y). \end{cases}$$

En posant $x = Ae^{\mu t}$, $y = Be^{\mu t}$, on a

$$A[\mu - (a\lambda_1 + \alpha\lambda_2)] - \lambda_2\beta B = 0,$$
$$-A(c\lambda_1 + \gamma\lambda_2) + B[\mu - (d\lambda_1 + \delta\lambda_2)] = 0.$$

On a donc pour μ l'équation

$$\mu^2 - \mu(a+d)\lambda_1 + (a\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(d\lambda_1 + \delta\lambda_2) - \beta\lambda_2(c\lambda_1 + \gamma\lambda_2) = 0.$$

En tenant compte des équations (10), on voit que les racines de cette équation sont

$$\mu = a\lambda_1, \qquad \mu = d\lambda_1,$$

L'intégrale générale du système (11) est alors

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{P}\beta e^{a\lambda_1 t} + \mathrm{Q}\beta e^{d\lambda_1 t}, \\ y &= -\,\mathrm{P}\alpha e^{a\lambda_1 t} + \mathrm{Q}[(d-a)h - \alpha]\, e^{d\lambda_1 t}, \qquad h = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \end{aligned}$$

P et Q étant des constantes. On les détermine de façon que, pour $t=0$, $x = x_0$, $y = y_0$.

On obtient ainsi, en posant $e^{\lambda_1 t} = \theta$, et remplaçant $(d-a)h - \alpha$ par h,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\beta x_0(h\theta^a + \alpha\theta^d) + \beta y_0(-\beta\theta^a + \beta\theta^d)}{\beta(h+\alpha)}, \\ y &= \frac{\alpha x_0 h(\theta^a - \theta^d) + \beta y_0(h\theta^d + \alpha\theta^a)}{\beta(h+\alpha)}. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} &= \frac{h\theta^a + \alpha\theta^d}{h+\alpha}, \\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} &= \frac{\beta(\theta^d - \theta^a)}{h+\alpha}, \\ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} &= \frac{\alpha h(\theta^a - \theta^d)}{\beta(h+\alpha)}, \\ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} &= \frac{h\theta^d + \alpha\theta^a}{h+\alpha}. \end{aligned}$$

Entre ces équations il faut éliminer θ et h. En divisant la troisième par la seconde, on a

$$h = -\frac{\beta^2}{\alpha}\,\frac{\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}}{\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}}.$$

En substituant dans les deux premières équations, il vient

$$\theta^d = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\theta^a = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y},$$

puis, en substituant dans les deux dernières, on a

$$\theta^a = \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\theta^d = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

et ces quatre équations reviennent à trois. On en tire

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}\right)^a = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y}\right)^d.$$

Donc, en posant $\frac{d}{a} = k$, $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda\frac{\partial P}{\partial y}\right)^k,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda\frac{\partial P}{\partial y}\right)^k.$$

Tel est le système des deux équations auxquelles nous sommes conduit.

L'équation à laquelle satisfait P est extrêmement simple; on trouve, en effet, de suite

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2\lambda\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \lambda^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Donc $P(x, y)$ est de la forme

$$P(x, y) = x\varphi(y + \lambda x) + \psi(y + \lambda x),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

Équations du premier ordre a trois variables.

7. Le nombre des groupes linéaires distincts à trois variables est très considérable. Il a été complètement formé par M. Sophus Lie. J'ai calculé, pour tous ces groupes, le système d'équations différentielles du premier ordre qui leur correspondent par ma méthode. Je ne les transcrirai pas tous ici, car il en est un certain nombre pour lesquels je n'ai pu encore décider du degré de généralité des fonctions qui y satisfont. Nous allons seulement indiquer quelques exemples simples, et, en particulier, obtenir tous les systèmes formés de *trois* équations.

8. Si nous ne voulons avoir que trois équations, nous devons prendre un groupe linéaire à trois variables et à *six* paramètres.

Un premier exemple d'un tel groupe sera obtenu, en adoptant les notations de M. Lie, au moyen des six transformations infinitésimales

$$zp, \quad zq, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp, \quad xp + yq + \alpha U,$$

où

$$U = xp + yq + zr,$$

α désignant une constante.

Les équations à adjoindre seront

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 z + \lambda_4 x + \lambda_5 y + \lambda_6 x(1 + \alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_2 z + \lambda_3 x - \lambda_4 y + \lambda_6 y(1 + \alpha),$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_6 \alpha z.$$

En posant

$$x = Ae^{\lambda t}, \qquad y = Be^{\lambda t}, \qquad z = Ce^{\lambda t},$$

on obtiendra, pour déterminer λ, une équation du troisième degré, dont les racines sont

$$\lambda = \lambda_6 \alpha, \qquad \lambda = \lambda_6(1+\alpha) \pm \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3\lambda_5}.$$

Pour chacune de ces trois racines, on a des quantités proportionnelles à A, B, C. Il est inutile d'écrire ces quantités pour la première racine; nous les désignerons par A_1, B_1, C_1. Pour la seconde, on peut prendre

$$A = \lambda_5, \qquad B = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3\lambda_5} - \lambda_1, \qquad C = 0$$

correspondant à

$$\lambda = \lambda_6(1+\alpha) + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3\lambda_5}.$$

On a donc pour l'intégrale générale du système précédent

$$\begin{aligned}
x &= M\lambda_5 e^{t[\lambda_6(1+\alpha)+\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_5}]} + N\lambda_5 e^{t[\lambda_6(1+\alpha)-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_5}]} + PA_1 e^{\lambda_6\alpha t},\\
y &= M\left(\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_5} - \lambda_1\right) e^{t[\lambda_6(1+\alpha)+\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_5}]}\\
&\quad + N\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_5} - \lambda_1\right) e^{t[\lambda_6(1+\alpha)-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_3\lambda_5}]} + PB_1 e^{\lambda_6\alpha t},\\
z &= PC_1 e^{\lambda_6\alpha t},
\end{aligned}$$

M, N, P désignant des constantes.

On doit choisir ces constantes de telle sorte que, pour $t = 0$, on ait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. On a de suite

$$PC_1 = z_0.$$

Quant à M et N, ce sont des fonctions linéaires de x_0, y_0, z_0. Cherchons les expressions de M et N en x_0, y_0 et z_0; nous aurons

$$\begin{aligned}
x_0 &= M\lambda_5 + N\lambda_5 + PA_1,\\
y_0 &= M(D - \lambda_4) + N(-D - \lambda_1) + PB_1, \qquad (D = \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_3\lambda_5}),
\end{aligned}$$

en substituant les valeurs de M, N et P dans les expressions de x, y et z; on obtient alors comme coefficients de x_0, y_0, z_0 les quantités que nous allons égaler aux dérivées partielles de P, Q, R.

On trouve ainsi de suite

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = e^{\lambda_6 \alpha t},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{\lambda_6 t (1+\alpha)} \left[\left(1 + \frac{\lambda_4}{D}\right) e^{Dt} + \left(1 - \frac{\lambda_4}{D}\right) e^{-Dt} \right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{\lambda_6 t (1+\alpha)} \left[\frac{\lambda_5}{D} e^{Dt} - \frac{\lambda_5}{D} e^{-Dt} \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{\lambda_6 t (1+\alpha)} \left[\frac{D^2 - \lambda_4^2}{D\lambda_5} e^{Dt} - \frac{D^2 - \lambda_4^2}{D\lambda_5} e^{-Dt} \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{\lambda_6 t (1+\alpha)} \left[\frac{D - \lambda_4}{D} e^{Dt} + \frac{-D - \lambda_4}{-D} e^{-Dt} \right].$$

L'élimination des quantités λ entre ces équations conduit aux trois relations *qui forment le système cherché*

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial x}\dfrac{\partial Q}{\partial y} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \left(\dfrac{dR}{dz}\right)^{\mu}, \end{cases}$$

en posant $\mu = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$.

9. Nous avons un second exemple d'un groupe à six paramètres, en prenant le groupe dont les transformations infinitésimales sont représentées par

$$zp, \quad zq, \quad xq, \quad xr, \quad xp - zr, \quad xp + yq + \alpha U,$$

U ayant la même signification que plus haut.

Une série de calculs analogues à ceux que nous venons d'indiquer rapidement montre que le système d'équations différentielles corres-

pondant se réduit à

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}\dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\dfrac{\partial R}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)^{\mu}, \end{cases}$$

μ ayant la même signification que plus haut.

10. Il existe deux autres groupes à trois variables et à six paramètres; mais ils peuvent se déduire des précédents en faisant $\alpha = \infty$; on a donc des équations différentielles rentrant dans le même type, puisqu'alors $\mu = 2$.

Nous pouvons donc dire que les systèmes (S) *et* (Σ) *forment les seuls systèmes de trois équations jouissant de la propriété demandée.* Bien entendu, nous ne considérons pas comme distincts des systèmes qui peuvent se réduire les uns aux autres par un changement de variables et de fonctions.

11. Les groupes à trois variables et dépendant de moins de six paramètres sont très nombreux. Il me paraît inutile de les énumérer tous et de transcrire ici les équations correspondantes que j'ai toutes formées. J'indiquerai seulement un exemple. Considérons le groupe à cinq paramètres représenté par

$$zp, \quad zq, \quad xq, \quad xr, \quad xp - zr.$$

Le système des quatre équations correspondantes est alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x} &= 1. \end{aligned}$$

L'énumération complète des autres groupes présenterait, je crois, peu d'intérêt.

Sur les invariants de quelques équations différentielles;

Par P. RIVEREAU,

Professeur à l'Institut catholique d'Angers.

1. Nous nous proposons d'étudier les invariants des équations différentielles définies par une équation algébrique et entière par rapport à la fonction y de x et à ses dérivées. Ces équations conservent la même forme lorsqu'on choisit une nouvelle fonction η et une nouvelle variable ξ liées à y et à x par les relations

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

De telles équations, de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p},$$

ont déjà été étudiées par M. Appell ([1]) et M. Elliot ([2]).

La méthode employée, due à M. Appell, consiste à déterminer les fonctions u, v, μ de façon à réduire l'équation différentielle à une forme plus simple en annulant ou en égalant plusieurs coefficients de l'équation transformée. La fonction v est alors complètement détermi-

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V, fasc. IV, p. 361.

([2]) *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VII, p. 101; année 1890.

née, mais les fonctions u et μ ne sont déterminées qu'à un facteur constant près. L'introduction de ces facteurs constants fournit des équations canoniques se déduisant immédiatement l'une de l'autre par un nouveau changement de fonction et de variable (*voir* les Mémoires de M. Appell, p. 370, et de M. Elliot, p. 104). Les coefficients de l'équation canonique sont des invariants absolus. Ces invariants ne sont pas des fonctions algébriques des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. Il est facile d'obtenir des équations canoniques dont les coefficients, invariants absolus, sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. Il suffit d'appliquer une méthode analogue à celle employée par Halphen pour les équations différentielles linéaires, c'est-à-dire de déterminer les fonctions u, μ, de façon que certains invariants relatifs se réduisent à l'unité. De telles relations fournissent, en général, des équations algébriques binômes pour déterminer les fonctions caractérisant le changement de fonction et de variable précédent.

Prenons comme exemple le cas traité par M. Appell dans le Mémoire cité (p. 366 et suiv.).

L'équation considérée est

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3.$$

Posons

$$y = \eta\, u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation prendra la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_0 + 3\gamma_1\eta + 3\gamma_2\eta^2 + \gamma_3\eta^3,$$

où

$$\gamma_0 = \frac{c_0 + 3c_1 v + 3c_2 v^2 + c_3 v^3 - v'}{\mu u},$$

$$\gamma_1 = \frac{c_1 + 2c_2 v + c_3 v^2}{\mu} - \frac{u'}{3\mu u},$$

$$\gamma_2 = \frac{u(c_2 + c_3 v)}{\mu},$$

$$\gamma_3 = \frac{u^2 c_3}{\mu}.$$

M. Appell détermine les fonctions v, u et μ, de manière à avoir

$$\gamma_2 = 0, \qquad \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_3 = 1.$$

Il appelle V, U, M les fonctions ainsi obtenues, Y et X, la fonction et la variable correspondant à ces valeurs particulières. D'où l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} = J + Y^3.$$

En posant

$$s_3 = c_0 c_3^2 - 3 c_1 c_2 c_3 + 2 c_2^3 + c_3 \frac{dc_2}{dx} - c_2 \frac{dc_3}{dx},$$

la valeur de l'invariant absolu J est

$$J = \frac{1}{U^3} \frac{s_3}{c_3^3}.$$

L'expression $\frac{s_3}{c_3^3}$ est un invariant relatif. Si l'on appelle σ_3 l'expression formée avec les fonctions γ de ξ, comme s_3 est formée avec les fonctions c de x, on aura

$$\frac{\sigma_3}{\gamma_3^3} = \frac{1}{u^3} \frac{s_3}{c_3^3}.$$

Si donc on détermine les fonctions v, u et μ de façon que l'on ait

$$\gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = 1, \qquad \frac{\sigma_3}{\gamma_3^3} = 1,$$

et si l'on appelle $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$, $\mathfrak{M}$ les fonctions particulières ainsi obtenues, Y_1 et X_1 la fonction et la variable correspondantes, on aura l'équation canonique

$$\frac{dY_1}{dX_1} = 1 + IY_1 + Y_1^3,$$

où I est un invariant absolu, fonction algébrique des coefficients c et de leurs dérivées par rapport à x.

Il est à remarquer que, dans ce cas particulier, on aurait pu poser

de suite $\gamma_0 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, au lieu de considérer l'invariant relatif $\frac{s_3}{c_3}$. Les fonctions v, u, μ sont déterminées sans quadrature, comme on le voit à la simple inspection des expressions de γ_0, γ_2, γ_3. Cela tient au cas particulier choisi comme exemple.

2. Avant d'aborder l'étude des invariants des équations différentielles de la forme indiquée au commencement de ce Mémoire, nous allons faire une remarque sur ceux des équations différentielles qui conservent la même forme quand on fait le changement de fonction et de variable,

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

De telles équations différentielles, en dehors des équations linéaires, ont été considérées par M. Appell (¹) et par nous-même (²).

Les équations canoniques ont été obtenues en donnant aux fonctions u et μ des valeurs particulières U et M annulant certains coefficients de l'équation transformée ou rendant égaux deux de ces coefficients. Si l'équation différentielle est homogène par rapport à la fonction y et à ses dérivées, on peut toujours trouver une forme canonique. La fonction U est déterminée par une équation différentielle linéaire, homogène et du premier ordre

$$\frac{U'}{U} = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation différentielle. La fonction M, dans certains cas, est déterminée par une équation algébrique binôme

$$M^p = \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une fonction rationnelle des coefficients. Nous avons dé-

(¹) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. V, fasc. IV, p. 388.

(²) *Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.* (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Gauthier-Villars et fils, 1890.)

montré que les coefficients de l'équation canonique sont alors des invariants absolus, algébriques par rapport aux coefficients de l'équation différentielle et à leurs dérivées.

La fonction M, dans d'autres cas, est déterminée, comme U, par une équation différentielle linéaire, homogène et du premier ordre. Alors les coefficients de l'équation canonique sont de la forme

$$\frac{A_i}{M^i}.$$

Ces coefficients $\frac{A_i}{M^i}$ sont des invariants absolus qui ne sont pas algébriques par rapport aux coefficients de l'équation différentielle. Les expressions A_i sont des fonctions rationnelles de ces coefficients et de leurs dérivées, et, de plus, ce sont des invariants relatifs. On montre facilement, en effet, que par le changement de fonction et de variable [1],

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'expression $(A_i)_1$, formée avec les coefficients de l'équation transformée comme A_i est formée avec les coefficients de l'équation proposée, vérifie la relation

$$(A_i)_1 = \frac{A_i}{\mu^i}.$$

On pourra donc donner à la fonction μ une valeur particulière $\mathfrak{M}$, de façon à réduire à l'unité l'invariant relatif le plus simple. La fonction U pourra être déterminée par une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. Alors l'équation canonique correspondante aura comme coefficients des invariants absolus, fonctions algébriques des coefficients de l'équation et de leurs dérivées.

Si l'équation n'était pas homogène par rapport à y et à ses dérivées, mais si elle était composée de plusieurs parties homogènes de degrés différents, une méthode analogue permettrait de trouver les invariants absolus algébriques.

---

[1] *Sur les invariants des équations différentielles linéaires* (*Annales de la Faculté de Toulouse*). *Voir* aussi le n° 5 du présent Mémoire.

Prenons comme exemple l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y' y = 0.$$

Le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x)$$

lui fait prendre la forme

$$\alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta'' \eta + 2\beta_3 \eta' \eta = 0.$$

M. Appell (*Journal de Mathématiques, loc. cit.*, p. 401) détermine l'équation canonique en donnant aux fonctions u et μ les valeurs particulières U et M qui annulent β_1 et β_3, en supposant l'invariant relatif $a_0 a_2 - b_1^2$ différent de zéro. Ces fonctions U et M sont alors fournies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0}, \\ &\frac{U'}{U}(a_0 a_2 - b_1^2) - (b_1 b_2 - a_0 b_3) = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation canonique ainsi obtenue est de la forme

$$Y''^2 + IY'^2 + JY^2 + 2KY''Y = 0,$$

où Y et X sont la fonction et la variable définies par

$$y = YU(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x).$$

L'invariant absolu I est égal à

$$I = \frac{a_0 a_2 - b_1^2}{a_0^2 M^2}.$$

On en conclut que l'invariant relatif $\frac{\alpha_0 \alpha_2 - \beta_1^2}{\alpha_0^2}$ vérifie la relation

$$\frac{\alpha_0 \alpha_2 - \beta_1^2}{\alpha_0^2} = \frac{a_0 a_2 - b_1^2}{a_0^2 \mu^2}.$$

Au lieu de la valeur particulière M considérée précédemment, prenons celle qui rend cet invariant égal à l'unité et soit $\mathfrak{M}$ cette valeur. Déterminons encore u de façon à annuler β_1, soit $\mathfrak{V}$ cette valeur; nous aurons

$$\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} + 2\frac{\mathfrak{V}'}{\mathfrak{V}} = -\frac{b_1}{a_0},$$

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{a_0 a_2 - b_1^2}{a_0^2}.$$

Si Y_1 et X_1 sont la fonction et la variable correspondant à ces valeurs particulières $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$, nous obtiendrons une équation canonique de la forme

$$Y_1''^2 + Y_1'^2 + HY_1^2 + 2KY_1''Y_1 + 2LY_1'Y_1 = 0.$$

Les invariants absolus H, K, L^2 sont rationnels par rapport aux coefficients de l'équation différentielle et à leurs dérivées.

5. Pour simplifier, nous étudierons les équations du second ordre définies par une équation algébrique, entière et du second degré par rapport à y, y', y''. L'équation générale est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y''y' + 2b_2 y''y + 2b_3 y'y \\ & \qquad + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

les coefficients $a_0, a_1, \ldots, d_0$ étant des fonctions de la variable indépendante x. Faisons le changement de fonction et de variable

$$(2)\qquad y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

Les dérivées de u, μ, v par rapport à x seront désignées par u', u'', μ', μ'', v', v'', et celles de η par rapport à ξ seront représentées par η', η''.

Les formules de transformation sont donc

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \eta u + v, \\ y' &= \eta'\mu u + \eta u' + v', \\ y'' &= \eta''\mu^2 u + \eta'(u\mu' + 2\mu u') + \eta u'' + v''. \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on aura une équation

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_0 \eta'^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta'' \eta \\ \qquad + 2\beta_3 \eta' \eta + 2\gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + 2\gamma_2 \eta + \delta_0 = 0, \end{cases}$$

où

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha_0 = a_0 \mu^4 u^2, \\ \alpha_2 = (u\mu' + 2\mu u')[a_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1 \mu u] \\ \qquad + [b_1(u\mu' + 2\mu u') + a_2 \mu u]\mu u, \\ \alpha_4 = a_0 u''^2 + a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_1 u'' u' + 2b_2 u'' u + 2b_3 u' u, \\ \beta_1 = [a_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1 \mu u]\mu^2 u, \\ \beta_2 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 = [a_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1 \mu u] u'' \\ \qquad + [b_1(u\mu' + 2\mu u') + a_2 \mu u] u' \\ \qquad + [b_2(u\mu' + 2\mu u') + b_3 \mu u] u, \\ \gamma_0 = (a_0 v'' + b_1 v' + b_2 v + c_0)\mu^2 u, \\ \gamma_1 = [\alpha_0(u\mu' + 2\mu u') + b_1 \mu u] v'' \\ \qquad + [b_1(u\mu' + 2\mu u') + a_2 \mu u] v' \\ \qquad + [b_2(u\mu' + 2\mu u') + b_3 \mu u] v \\ \qquad + c_0(u\mu' + 2\mu u') + c_1 \mu u, \\ \gamma_0 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u) v'' + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u) v' \\ \qquad + (b_2 u'' + b_3 u' + a_4 u) v + c_0 u'' + c_1 u' + c_2 u, \\ \delta_0 = a_0 v''^2 + a_2 v'^2 + a_4 v^2 + 2b_1 v'' v' + 2b_2 v'' v \\ \qquad + 2b_3 v' v + 2c_0 v'' + 2c_1 v' + 2c_2 v + d_0. \end{cases}$$

La partie homogène du second degré de l'équation (4) est la transformée de la partie homogène du second degré de l'équation (1) à l'aide du changement de fonction et de variable

$$y = \eta u, \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu.$$

Les invariants de cette partie homogène sont donc aussi des invariants

de l'équation (1), même pour la transformation (2). On pourra, par conséquent, donner à u et μ des valeurs particulières U et M pour lesquelles la partie homogène du second degré prend une forme canonique. Il restera à déterminer la fonction v. Nous donnerons d'abord à cette fonction v une valeur particulière V, de façon à faire prendre à (4) la forme la plus simple possible. Nous étudierons les propriétés des coefficients de cette forme réduite relatives à la transformation (2) et nous en déduirons un moyen de former des équations canoniques dont les coefficients sont des invariants absolus qui seront ou transcendants ou algébriques par rapport aux coefficients de l'équation (1) et à leurs dérivées.

Remarquons auparavant que les formules (3) constituent une substitution linéaire sur les quantités y, y', y''. Le discriminant de l'équation (1), considérée comme une quadrique, est donc un invariant de l'équation différentielle. Le module de la transformation est $\mu^3 u^3$. Pour les équations de degré supérieur au second, on pourra faire les mêmes remarques que pour les équations homogènes. Ainsi, par exemple, l'équation différentielle étant

$$f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

les dérivées partielles par rapport à $y^{(n)}$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}, \cdots$ sont des covariants et leurs invariants seront des invariants de l'équation différentielle (*voir* Thèse, p. 14).

Enfin les équations considérées peuvent se diviser en trois classes, suivant la façon dont la partie du second degré contient la dérivée y'' (Appell, *loc. cit.*, p. 392). Dans la première classe a_0 et b_1 sont nuls; dans la seconde a_0 est nul et b_1 est différent de zéro; dans la troisième a_0 est différent de zéro. Cette classification repose sur ce que la transformation (3) ne change pas la classe d'une équation.

Nous commencerons par la troisième classe. L'équation générale se prête mieux à notre but qui est de montrer comment on peut obtenir les invariants de l'équation différentielle.

4. Comme nous l'avons indiqué, nous allons réduire l'équation différentielle à la forme la plus simple possible. Pour conserver les nota-

tions de M. Appell, nous désignerons par $A_0, A_2, A_4, B_1, B_2, B_3$ les mineurs du discriminant D,

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

relatifs aux éléments $a_0, \ldots, b_3$. Ainsi

$$A_4 = a_0 a_2 - b_1^2, \qquad B_3 = b_1 b_2 - a_0 b_3, \qquad \ldots.$$

Si A_4 est différent de zéro, on pourra donner à u et μ les valeurs particulières qui annulent β_1 et β_3, puis à v celle qui annule γ_1. En appelant U, M, V ces valeurs particulières, $U', M', V', \ldots$ leurs dérivées par rapport à x, on aura

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{M'}{M} + 2\dfrac{U'}{U} = -\dfrac{b_1}{a_0}, \qquad \dfrac{U'}{U} = \dfrac{B_3}{A_4}, \\ V' = \dfrac{B_3}{A_4} V + \dfrac{C_1}{A_4}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$C_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1.$$

Y et X étant la fonction et la variable correspondant à ces valeurs particulières U, M, V, on aura

$$y = YU(x) + V(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x).$$

Si l'on divise tous les termes de l'équation ainsi transformée par le coefficient de Y''^2, on aura une équation réduite à la forme

$$(7) \quad Y''^2 + IY'^2 + JY^2 + 2KY''Y + 2PY'' + 2QY + R = 0.$$

Les coefficients I, J, K sont des invariants absolus, déterminés à un facteur constant près et indépendants de V. Ils ont été calculés par M. Appell (*loc. cit.*, p. 402). Leurs valeurs sont

$$I = \frac{A_4}{a_0^2 M^2}, \qquad J = \frac{S_{12}}{a_0 A_4^4 M^4}, \qquad K = \frac{S_6}{A_4^2 M^2},$$

où l'on a posé

$$S_6 = B_3^2 - A_4 B_2 + A_4 \frac{dB_3}{dx} - B_3 \frac{dA_4}{dx},$$

$$S_{12} = a_0 S_6^2 + A_4^3 D.$$

On a ensuite

$$P = \frac{1}{U}\left(KV + \frac{\mathfrak{P}}{M^2}\right),$$

$$Q = \frac{1}{U}\left(JV + \frac{\mathfrak{Q}}{M^4}\right),$$

$$R = \frac{1}{U^2}\left(JV^2 + \frac{2\mathfrak{Q}}{M^4}V + \frac{\mathfrak{R}}{M^4}\right),$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{P} = \frac{C_1 B_3 + (c_0 a_2 - b_1 c_1) A_4 + A_4 \frac{dC_1}{dx} - C_1 \frac{dA_4}{dx}}{A_4^2},$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{S_6 \mathfrak{P}}{A_4^2} + \frac{\delta}{a_0 A_4}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & c_0 \\ b_1 & a_2 & c_1 \\ b_2 & b_3 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}^2 + \frac{\delta^2}{a_0 A_4 D} + \frac{\Delta}{a_0 D}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & c_0 \\ b_1 & a_2 & b_3 & c_1 \\ b_2 & b_3 & a_4 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & d_0 \end{vmatrix}.$$

Les valeurs de P et Q se calculent facilement, car les formules

$$V' = \frac{B_3}{A_4} V + \frac{C_1}{A_4},$$

$$V'' = \left[\frac{B_3^2}{A_4^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{B_3}{A_4}\right)\right] V + \frac{C_1 B_3}{A_4^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1}{A_4}\right)$$

montrent que les coefficients de V s'obtiennent en remplaçant V' par $\frac{U'}{U}V$ et V'' par $\frac{U''}{U}V$ dans $\frac{\gamma_0}{\alpha_0}$ et $\frac{\gamma_2}{\alpha_0}$. Les parties indépendantes de V se

trouvent aussi aisément. En effet, en supposant

$$V = 0, \qquad V' = \frac{C_1}{A_4}, \qquad V'' = \frac{C_1 B_3}{A_4^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1}{A_4}\right),$$

on trouve

$$a_0 V'' + b_1 V' + b_2 V + c_0 = a_0 \mathfrak{P},$$
$$b_1 V'' + a_2 V' + b_3 V + c_1 = b_1 \mathfrak{P},$$
$$b_2 V'' + b_3 V' + a_4 V + c_2 = b_2 \mathfrak{P} + \frac{\delta}{A_4}.$$

Le reste du calcul s'achève de suite. La valeur de R a été obtenue à l'aide des discriminants des deux équations différentielles. On a, en effet, les relations

$$R(J - K^2) - JP^2 - Q^2 + 2KPQ = \frac{\Delta}{a_0^2 A_4 M^8 U^2}$$

et

$$J - K^2 = \frac{D}{a_0 A_4 M^4}.$$

5. Les fonctions des coefficients appelées $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$ jouissent d'une propriété remarquable. Pour la mettre en évidence nous ferons un raisonnement déjà employé ailleurs. L'équation (1) prend la forme réduite (7) au moyen des formules

$$y = YU(x) + V(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x).$$

Posons maintenant

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation (1) prendra la forme (4) que nous réduirons de la même manière, en posant

$$\eta = Y_1 U_1(\xi) + V_1(\xi), \qquad \frac{dX_1}{d\xi} = M_1(\xi).$$

L'équation réduite ainsi obtenue est

$$(7)' \quad Y_1''^2 + I_1 Y_1'^2 + J_1 Y_1^2 + 2K_1 Y_1'' Y_1 + 2P_1 Y_1'' + 2Q_1 Y_1 + R_1 = 0;$$

on sait déjà que

$$I_1 = I, \qquad J_1 = J, \qquad K_1 = K,$$

car on peut supposer que les constantes d'intégration dont dépendent U, M, U_1, M_1 aient été choisies de façon à obtenir ce résultat, ce qui ne nuit en rien à la généralité pour ce que nous voulons obtenir. Désignons par (U_1), (M_1), (V_1) ce que deviennent les fonctions U_1, M_1, V_1 de ξ quand on y remplace ξ par sa valeur en x; les formules précédentes donnent

$$y = Y_1 u(U_1) + u(V_1) + v, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \mu(M_1).$$

On en conclut que les coefficients de l'équation (7)' se déduisent de ceux de l'équation (7) en changeant dans ceux-ci U en uU_1, M en μM_1 et V en $uV_1 + v$. On aura donc

$$P_1 = \frac{1}{U_1}\left(K_1 V_1 + \frac{\mathfrak{P}_1}{M_1^2}\right) = \frac{1}{uU_1}\left[K(uV_1 + v) + \frac{\mathfrak{P}}{\mu^2 M_1^2}\right].$$

Pour simplifier cette expression, il faut remarquer que l'on a

$$K_1 = K = \frac{S_6}{A_4^2 \mu^2 M_1^2}.$$

On aura donc

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{\mu^2 u}\left(\mathfrak{P} + \frac{S_6}{A_4^2} v\right).$$

On trouverait de même

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{1}{\mu^4 u}\left(\mathfrak{Q} + \frac{S_{12}}{a_0 A_4^4} v\right),$$

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu^4 u^2}\left(\mathfrak{R} + 2\mathfrak{Q} v + \frac{S_{12}}{a_0 A_4^4} v^2\right).$$

De ces expressions on déduit facilement

$$\delta_1 = \mu^6 u^5 (\delta + D v).$$

6. Les expressions trouvées pour P, Q, R permettent de former

plusieurs invariants. Ainsi l'on a

$$\mathrm{JP} - \mathrm{KQ} = \frac{1}{\mathrm{M}^6 \mathrm{U}} \left(\frac{\mathrm{S}_{12} \mathfrak{P} - a_0 \Lambda_4^2 \mathrm{S}_6 \mathfrak{Q}}{a_0 \Lambda_4^5} \right) = \frac{1}{\mathrm{M}^6 \mathrm{U}} \left(\frac{\Lambda_4^2 \mathrm{D} \mathfrak{P} - \mathrm{S}_6 \delta}{a_0 \Lambda_4^3} \right).$$

$$\mathrm{Q}^2 - \mathrm{JR} = \frac{1}{\mathrm{M}^8 \mathrm{U}^2} \left(\mathfrak{Q}^2 - \frac{\mathrm{S}_{12} \mathfrak{R}}{a_0 \Lambda_4^5} \right);$$

on obtient ainsi deux invariants absolus. Les quantités placées entre parenthèses dans les seconds membres sont des invariants relatifs. On peut avoir d'autres invariants en calculant les dérivées de P, Q, R, par rapport à X,

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{U}} \left(\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{X}} \mathrm{Y} + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}^3} \right),$$

où

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{S}_6 \mathrm{C}_1}{\Lambda_4^3} + \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \mathfrak{P} \left(\frac{3 \mathrm{B}_3}{\Lambda_4} + \frac{2 b_1}{a_0} \right).$$

L'expression

$$\mathrm{K} \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}} - \mathrm{P} \frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{X}} = \frac{\Psi}{\mathrm{M}^5 \mathrm{U}}$$

est un invariant absolu. La valeur de Ψ est

$$\Psi = \frac{\mathrm{S}_6}{\Lambda_4^2} \left(\frac{\mathrm{S}_6 \mathrm{C}_1}{\Lambda_4^3} + \frac{d\mathfrak{P}}{dx} - \frac{\mathfrak{P} \mathrm{B}_3}{\Lambda_4} \right) - \mathfrak{P} \frac{d}{dx} \left(\frac{\mathrm{S}_6}{\Lambda_4^2} \right).$$

Si l'on cherche les relations que doivent vérifier les coefficients de l'équation réduite pour que l'équation différentielle possède une propriété indépendante du changement de fonction et de variable, les équations obtenues s'exprimeront à l'aide d'invariants absolus. Cherchons, comme exemple, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale de l'équation (7) soit de la forme

$$\mathrm{Y} = h_1 \mathrm{Y}_1 + h_2 \mathrm{Y}_2 + h_3 \mathrm{Y}_3 + \mathrm{Y}_4,$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont des fonctions de X linéairement indépendantes et où les constantes h_1, h_2, h_3 sont liées par une relation algébrique et entière du second degré (*voir* Appell, *loco citato*, p. 412). En désignant par F le premier membre de l'équation (7) et par $\lambda(\mathrm{X})$ une fonction de X, on doit avoir identiquement, comme l'a démontré

M. Appell (*Comptes rendus*, novembre 1888),

$$\frac{dF}{dX} - \lambda F = (2Y''' + \alpha Y'' + \beta Y' + \gamma Y + \delta)(Y'' + KY + P).$$

L'identification donne après quelques réductions

$$\frac{dK}{dX} = 0, \qquad \frac{dP}{dX} = 0, \qquad J = K(I + K),$$

$$JP - KQ = 0, \qquad \frac{d}{dX}\left(\frac{P^2}{I}\right) = \frac{d}{dX}\left(\frac{R}{I}\right);$$

on a ensuite

$$\lambda = -\alpha = \frac{1}{I}\frac{dI}{dX}, \qquad \beta = \frac{2J}{K}, \qquad \gamma = K\alpha, \qquad \delta = P\alpha.$$

Les deux seules relations $\frac{dP}{dX} = 0$, $\frac{d}{dX}\left(\frac{P^2}{I}\right) = \frac{d}{dX}\left(\frac{R}{I}\right)$ ne sont pas exprimées à l'aide d'invariants absolus. Mais on voit de suite que l'on peut remplacer $\frac{dP}{dX} = 0$ par

$$K\frac{dP}{dX} - P\frac{dK}{dX} = 0.$$

Pour transformer l'autre équation, considérons l'invariant absolu $Q^2 - JR$. On a, en tenant compte des relations précédentes,

$$\frac{Q^2 - JR}{JI} = \frac{Q^2}{JI} - \frac{R}{I} = \frac{J}{K^2} \times \frac{P^2}{I} - \frac{R}{I} = \frac{P^2}{I} - \frac{R}{I} + \frac{P^2}{K}.$$

P et K étant des constantes, on en déduit que la dernière équation de condition peut s'écrire

$$\frac{Q^2 - JR}{JI} = C,$$

C étant une constante.

On a supposé $I \neq 0$; car, dans l'hypothèse $I = 0$, l'équation différentielle n'eût pas été irréductible, en tenant compte des autres équations de condition fournies par l'identification.

L'intégration s'achève en résolvant l'équation

$$2Y''' - \frac{I'}{I}Y'' + 2(I + K)Y' - K\frac{I'}{I}Y - P\frac{I'}{I} = 0.$$

où $I' = \frac{dI}{dX}$; K et P sont des constantes. L'équation du second ordre

$$Y'' + KY + P = 0$$

donne des intégrales singulières.

Remarquons que le changement de fonction

$$Y = z - \frac{P}{K} \qquad \left(\text{où } \frac{P}{K} \text{ est constant}\right)$$

transformera, dans ce cas, l'équation (7) en une équation de la forme

$$z''^2 + I z'^2 + J z^2 + 2K z' z + \mu I = 0,$$

où μ est une constante. Si l'on considère l'équation obtenue en annulant la partie homogène, son intégrale générale ne différera de celle de l'équation complète que par la relation qui lie les constantes arbitraires.

7. Les formules obtenues aux n^{os} **5** et **6** montrent comment on pourra former une équation canonique. Supposons que S_6 soit différent de zéro. On pourra donner à v la valeur particulière φ qui annule $\mathfrak{C}_1$. En gardant pour u et μ les valeurs U et M qui font prendre la forme canonique à la partie homogène du second degré, on obtiendra une équation canonique dont les coefficients sont des invariants absolus, mais transcendants par rapport aux coefficients de l'équation primitive. Si S_6 était nul on pourrait donner à v la valeur qui annule $\mathfrak{Q}_1$, si S_{12} est différent de zéro ou bien celle qui annule $\hat{\delta}_1$ en supposant que D soit différent de zéro. Pour obtenir une équation canonique dont les coefficients soient des fonctions rationnelles ou algébriques des coefficients de l'équation primitive et de leurs dérivées, on déterminera v comme on vient de le dire. Puis on considérera deux invariants absolus différents de zéro de la forme

$$\frac{A}{M^p}, \quad \frac{B}{M^q U^r}.$$

A et B sont des invariants relatifs tels que

$$A_1 = \frac{A}{\mu^p}, \qquad B_1 = \frac{B}{\mu^q u^r};$$

on donnera à μ et à u les valeurs particulières qui rendent A_1 et B_1 égaux à l'unité. L'équation ainsi transformée aura comme coefficients des invariants absolus algébriques. Dans le cas précédent, I est différent de zéro. Si l'un des trois invariants

$$JP - KQ, \quad Q^2 - JR, \quad K\frac{dP}{dX} - P\frac{dK}{dX}$$

est différent de zéro, par exemple, le premier, on donnera à u et μ les valeurs particulières suivantes $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{M}$ définies par

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{A_4}{a_0^2},$$

$$\mathfrak{M}^6 \mathfrak{V} = \frac{A_4^2 D\varphi - S_6 \delta}{a_0 A_4^3},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{V} = \frac{a_0^5}{A_4^4}\left(\frac{D\varphi}{A_4^2} - S_6 \delta\right).$$

En supposant S_6 différent de zéro, on pourra poser

$$\varphi = -\frac{A_4^2 \varphi}{S_6}.$$

L'équation canonique correspondante sera de la forme

$$\begin{aligned} Y_1''^2 + AY_1'^2 + BY_1^2 + 2CY_1''Y_1' + 2DY_1''Y_1 \\ + 2EY_1'Y_1 + 2FY_1'' + 2GY_1' + 2HY_1 + L = 0, \end{aligned}$$

où Y_1 et X_1 sont définies par

$$y = Y_1\mathfrak{V} + \varphi, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \mathfrak{M}.$$

Les invariants ainsi obtenus sont liés par les trois relations

$$A = C^2 + 1,$$

$$(CF - G)(CD - E) + F(C^2 + 1) - CG + \frac{d}{dX_1}(CF - G) = 0,$$

$$0 = 1 + \begin{vmatrix} 1 & C & F \\ C & A & G \\ D & E & H \end{vmatrix} \times \left[(CD - E)^2 - (CE - AD) + \frac{d}{dX_1}(CD - E)\right].$$

Ces trois équations détermineront A, B, D en fonction des six autres invariants que l'on pourra considérer comme fondamentaux. Les quantités D et H ne désignent pas la même chose ici que précédemment.

8. Nous avons supposé que A_4 était différent de zéro. Si A_4 était nul, on ferait un changement de fonction et de variable annulant β_1 et rendant β_3 égal à l'unité. Les fonctions U et M vérifient alors les équations

$$\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0}, \qquad M^3 = -\frac{B_3}{a_0^2}.$$

On suppose que B_3 n'est pas nul. Le coefficient γ_1 devient alors égal à

$$-\frac{M^2 U}{a_0}(B_3 v + C_1), \qquad \text{où} \qquad C_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1.$$

On donnera à v la valeur particulière V, qui annule ce coefficient,

$$V = -\frac{C_1}{B_3}.$$

En divisant tous les termes par $\alpha_0 = a_0 M^4 U^2$, on obtiendra l'équation canonique

$$Y''^2 + LY^2 + 2NY''Y + 2Y'Y + 2SY'' + 2TY + O = 0,$$

L^3 et N^3 sont des invariants absolus rationnels par rapport aux coeffi-

cients de l'équation primitive. S et T sont de la forme

$$S = \frac{\Sigma}{M^2 U}, \qquad T = \frac{\Theta}{M^4 U^2},$$

Σ et Θ sont des invariants relatifs rationnels. En continuant d'affecter de l'indice 1 les expressions formées avec les coefficients de l'équation transformée (4), on aura

$$\Sigma_1 = \frac{\Sigma}{\mu^2 u}, \qquad \Theta_1 = \frac{\Theta}{\mu^4 u^2}.$$

Si l'on suppose Σ différent de zéro, on pourra obtenir une équation canonique dont les coefficients sont des invariants absolus algébriques à l'aide du changement de fonction et de variable

$$y = Y_1 \mathfrak{V} + \varphi, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \mathfrak{M},$$

où les fonctions $\mathfrak{V}$, φ, $\mathfrak{M}$ sont déterminées par

$$\mathfrak{M}^3 = -\frac{B_3}{C_1},$$

$$\mathfrak{V} = \frac{\Sigma}{\mathfrak{M}^2},$$

$$\varphi = -\frac{C_1}{B_3}.$$

La légitimité du procédé est mise en évidence par les relations suivantes

$$\frac{\beta_1\beta_2 - \alpha_0\beta_3}{\alpha_0^2} = \frac{1}{\mu^3}\,\frac{b_1 b_2 - a_0 b_3}{a_0^2},$$

$$\frac{\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1}{\alpha_0^2} = \frac{1}{a_0^2\mu^3 u}(B_3 v + C_1),$$

calculées à l'aide des formules générales (5) en tenant compte seulement de $A_4 = 0$.

9. En supposant $A_4 = B_3 = 0$, le discriminant D s'annule d'après l'équation

$$A_2 A_4 - B_3^2 = a_0 D.$$

Il est facile de voir qu'on a aussi $B_2 = 0$. Si A_2 est différent de zéro, ce sera un invariant relatif. Si enfin $A_2 = 0$, tous les mineurs de D sont nuls et la partie homogène du second degré est le carré d'une expression linéaire et homogène en y, y', y''. Les mineurs du déterminant δ jouissent d'une propriété assez remarquable. Nous avons déjà vu que δ vérifie la relation

$$\delta_1 = \mu^6 u^5 (\delta + Dv),$$

où, suivant la notation adoptée, δ_1 désigne l'expression

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_3 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Nous venons de vérifier que A_1 étant nul, mais B_3 étant différent de zéro, le mineur de δ_1 correspondant à l'élément β_3, c'est-à-dire $(\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1)$, jouit de la même propriété que δ_1, à savoir

$$\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1 = \mu^5 u^3 [(c_0 b_1 - a_0 c_1) + B_3 v].$$

Si l'on suppose $A_1 = B_3 = B_2 = 0$, δ est nul aussi. La quantité $\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1$ devient un invariant relatif. Soit alors A_2 différent de zéro. Le mineur de α_2 dans δ_1 vérifie l'égalité

$$\alpha_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2 = \mu^4 u^3 \left[(a_0 c_2 - c_0 b_2) + A_2 v - (c_0 b_1 - a_0 c_1)\frac{u'}{u} \right].$$

Lorsque $c_0 b_1 - a_0 c_1$ n'est pas nul, on peut donner à u et μ les valeurs particulières qui rendent égaux à l'unité les invariants

$$\left(\frac{A_2}{a_0^2}\right)_1, \quad \frac{\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1}{\alpha_0^2},$$

et à v celle qui annule $\alpha_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2$. L'équation canonique ainsi obtenue a pour coefficients des invariants absolus algébriques.

Dans ce cas, on peut encore déterminer u, μ, v, de telle sorte que l'on ait

$$\beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = \alpha_0, \qquad \alpha_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2 = 0;$$

on aura en même temps

$$\alpha_2 = \beta_3 = 0.$$

L'équation canonique correspondante a pour coefficients des invariants transcendants, mais elle est plus simple que la première.

Si $c_0 b_1 - a_0 c_1 = 0$, on déterminera u, μ et v, de façon que l'on ait

$$\beta_1 = 0, \qquad \left(\frac{A_2}{a_0^2}\right)_1 = 1, \qquad \alpha_0\gamma_2 - \gamma_0\beta_2 = 0.$$

En même temps on aura

$$\alpha_2 = \beta_3 = \gamma_1 = 0.$$

10. Supposons enfin $A_2 = 0$. Nous obtiendrons une équation réduite en donnant à u et μ les valeurs qui annulent β_1 et qui rendent égaux α_0 et γ_1. Puis, nous déterminerons v de façon à annuler γ_0. Soient U, M, V ces valeurs, nous aurons

$$\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0},$$

$$M^3 U = -\frac{C_1}{a_0}, \qquad \text{où} \qquad C_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1,$$

$$a_0 V'' + b_1 V' + b_2 V + c_0 = 0.$$

Alors on a aussi

$$\alpha_2 = \beta_3 = 0.$$

En posant

$$y = YU + V, \qquad \frac{dX}{dx} = M,$$

et en divisant tous les termes par $\alpha_0 = a_0 M^4 U^2$, on aura

$$Y''^2 + A^2 Y^2 + 2AY''Y + 2Y' + 2BY + D = 0.$$

Il est facile de vérifier qu'on a

$$B = -\frac{1}{a_0^2 M^4 U}\left[C_1 \frac{U'}{U} + (c_0 b_2 - a_0 c_2)\right],$$

$$D = \frac{1}{a_0^2 M^4 U^2}\left[-2C_1 V' - 2(c_0 b_2 - a_0 c_2)V + a_0 d_0 - c_0^2\right].$$

On a vu au n° 5 que, si l'on fait d'abord le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

et si l'on ramène l'équation transformée en η à la forme réduite, les deux équations réduites se déduisent l'une de l'autre par le changement de U en $u\mathrm{U}_1$, de M en $\mu\mathrm{M}_1$ et de V en $u\mathrm{V}_1 + v$, où U_1, M_1, V_1 désignent les fonctions de ξ qui servent à obtenir la seconde forme réduite. Dans le cas présent, on sait déjà que C_1 est un invariant vérifiant la relation

$$\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1 = \mu^5 u^3(c_0 b_1 - a_0 c_1).$$

Si l'on calcule de cette façon les deux expressions

$$\mathrm{B}_1 = -\frac{1}{\alpha_0^2\mathrm{M}_1^5\mathrm{U}_1}\left[(\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1)\frac{\mathrm{U}'_1}{\mathrm{U}_1} + (\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2)\right],$$

$$\mathrm{D}_1 = \frac{1}{\alpha_0^2\mathrm{M}_1^4\mathrm{U}_1^2}[-2(\gamma_0\beta_1 - \alpha_0\gamma_1)\mathrm{V}'_1 - 2(\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2)\mathrm{V}_1 + \alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2],$$

où U'_1 et V'_1 désignent des dérivées par rapport à ξ, on trouve facilement

$$\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2 = \mu^4 u^3\left[(c_0 b_2 - a_0 c_2) + (c_0 b_1 - a_0 c_1)\frac{u'}{u}\right],$$

$$\alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2 = \mu^4 u^2[-2(c_0 b_1 - a_0 c_1)v' - 2(c_0 b_2 - a_0 c_2)v + a_0 d_0 - c_0^2].$$

La première de ces expressions avait déjà été calculée directement.

La seconde nous montre que nous aurions pu établir une forme réduite en conservant à u et μ les valeurs particulières U et M précédentes et en donnant à v la valeur V qui annule $\alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2$. On pourrait encore déterminer u et μ de façon à rendre nulles les quantités β_1 et $\gamma_0\beta_2 - \alpha_0\gamma_2$. Dans l'un et l'autre cas, γ_0 sera égal à

$$\gamma_0 = \mathrm{M}^2\mathrm{U}(\mathcal{A}\mathrm{V} + \mathcal{B}),$$

où, en posant, pour abréger,

$$\mathrm{C}_1 = c_0 b_1 - a_0 c_1, \qquad \mathrm{C}_2 = c_0 b_2 - a_0 c_2,$$

on a

$$\mathcal{A} = a_0\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - b_1\left(\frac{C_2}{C_1}\right) + b_2 - a_0\frac{d}{dx}\left(\frac{C_2}{C_1}\right),$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\left[a_0\frac{d}{dx}\left(\frac{a_0 d_0 - c_0^2}{C_1}\right) - \frac{(a_0 C_2 - b_1 C_1)(a_0 d_0 - c_0^2)}{C_1^2} + 2b_2\right].$$

L'expression $\mathcal{A}$ est un invariant. On peut facilement en faire la vérification directe. On peut le voir aussi en remarquant que la seconde méthode d'obtenir la forme réduite eût fourni pour β_2 l'expression

$$\beta_2 = \mathcal{A}.$$

Or, on sait, d'une manière générale, qu'en déterminant les fonctions U et M par des équations différentielles linéaires homogènes et du premier ordre, les coefficients de la partie homogène du second degré de l'équation réduite sont des invariants absolus. On aura donc, l'indice 1 ayant la signification adoptée,

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\alpha_0} = \frac{1}{\mu^2}\frac{\mathcal{A}}{a_0},$$

d'où

$$\mathcal{A}_1 = \mu^2 u^2 \mathcal{A}.$$

En raisonnant comme précédemment, on conclura que

$$\mathcal{B}_1 = \mu^2 u(\mathcal{A} v + \mathcal{B}).$$

On obtiendra une équation canonique en déterminant encore u et μ comme pour les équations réduites précédentes, mais en donnant à v la valeur qui annule $\mathcal{B}_1$.

Il est presque inutile d'ajouter qu'on peut même obtenir une équation canonique dont les coefficients seront des invariants algébriques. Les calculs précédents montrent assez clairement comment il faut déterminer pour cela les fonctions u, μ, v.

Si C_1 était nul, C_2 serait alors un invariant. En annulant $\alpha_0\delta_0 - \gamma_0^2$ on obtiendrait une valeur de v pouvant servir à obtenir une équation canonique. Enfin, lorsque C_1 et C_2 sont nuls à la fois, l'équation diffé-

rentielle est décomposable en un produit de facteurs linéaires et n'est plus irréductible.

11. On traitera de la même manière les équations de la seconde classe pour lesquelles a_0 est nul, mais b_1 est différent de zéro. Ces équations sont de la forme

$$\begin{aligned} &a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y'' y \\ &\quad + 2b_3 y' y + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0. \end{aligned}$$

Par le changement de fonctions et de variable

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

cette équation devient

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta'' \eta \\ &\quad + 2\beta_3 \eta' \eta + 2\gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + 2\gamma_2 \eta + \delta_0 = 0, \end{aligned}$$

où, d'après les formules (5),

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_2 = 2b_1 \mu u(u\mu' + 2\mu u') + a_2 \mu^2 u^2, \\ \alpha_4 = a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_1 u'' u' + 2b_2 u'' u + 2b_3 u' u, \\ \beta_1 = b_1 \mu^3 u^2, \\ \beta_2 = (b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 = (u\mu' + 2\mu u')(b_1 u' + b_2 u) \\ \qquad + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)\mu u, \\ \gamma_0 = (b_1 v' + b_2 v + c_0)\mu^2 u, \\ \gamma_1 = (u\mu' + 2\mu u')(b_1 v' + b_2 v + c_0) \\ \qquad + (b_1 v'' + a_2 v' + b_3 v + c_1)\mu u, \\ \gamma_2 = (b_1 u' + b_2 u)v'' + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)v' \\ \qquad + (b_2 u'' + b_3 u' + a_4 u)v + c_0 u'' + c_1 u' + c_2 u, \\ \delta_0 = a_2 v'^2 + a_4 v^2 + 2b_1 v'' v' + 2b_2 v'' v \\ \qquad + 2b_3 v' v + 2c_0 v'' + 2c_1 v' + 2c_2 v + d_0. \end{cases}$$

Donnons aux fonctions u, μ, v les valeurs particulières U, M, V qui annulent les coefficients α_2, β_2 et γ_0, nous aurons

$$\frac{M'}{M} + \frac{2U'}{U} = -\frac{a_2}{2b_1},$$

$$\frac{U'}{U} = -\frac{b_2}{b_1},$$

$$V' = -\frac{b_2}{b_1}V - \frac{c_0}{b_1};$$

Y et X désignant la fonction et la variable correspondantes, on aura

$$y = YU + V, \qquad \frac{dX}{dx} = M.$$

Divisons tous les termes par la valeur du coefficient β_1, nous obtiendrons l'équation réduite

$$(8) \qquad HY^2 + 2Y''Y' + 2LY'Y + 2AY' + 2BY + C = 0.$$

Les invariants absolus H et L ont les valeurs

$$H = -\frac{D}{M^3 b_1^3}, \qquad L = \frac{E_4}{M^2 b_1^2},$$

où

$$D = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

$$E_4 = b_2^2 + b_2 b_1' - b_1 b_2' + b_1 b_3 - a_2 b_2$$

(Appell, *loc. cit.*, p. 395).

On a ensuite

$$A = \frac{1}{U}\left(LV + \frac{\mathcal{A}}{M^2}\right),$$

$$B = \frac{1}{U}\left(HV + \frac{\mathcal{B}}{M^3}\right),$$

$$C = \frac{1}{U^2}\left(HV^2 + \frac{2\mathcal{B}}{M^3}V + \frac{\mathcal{C}}{M^3}\right),$$

où

$$\mathcal{A} = \frac{c_0 b_2 - c_0 a_2 + b_1 c_1 + c_0 b_1' - b_1 c_0'}{b_1^2},$$

$$\mathcal{B} = -\frac{\delta}{b_1^3}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_0 \\ b_1 & a_2 & c_1 \\ b_2 & b_3 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \frac{\Delta}{b_1 D} - \frac{\delta^2}{b_1^3 D}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & c_0 \\ b_1 & a_2 & b_3 & c_1 \\ b_2 & b_3 & a_4 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & d_0 \end{vmatrix}.$$

On prouverait, comme au n° 5, que l'on a

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\mu^2 u}\left(\mathcal{A} + \frac{E_4}{b_1^2} v\right),$$

$$\delta_1 = \mu^6 u^5 (\delta + D v),$$

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{\mu^3 u^2}\left(\mathcal{C} + 2\mathcal{B} v - \frac{D}{b_1^3} v^2\right).$$

De même l'expression

$$HA - LB = -\frac{1}{M^5 U}\left(\frac{D\mathcal{A} + b_1 E_4 \mathcal{B}}{b_1^3}\right)$$

est un invariant absolu.

L'expression $B^2 - HC$ donne l'égalité déjà connue

$$B^2 - HC = \frac{1}{M^6 U^2} \frac{\Delta}{b_1^4}.$$

En calculant les dérivées de A, B, C par rapport à X, on formera de nouvelles expressions invariantes telles que

$$L \frac{dA}{dX} - A \frac{dL}{dX}.$$

Les formules précédentes permettent donc d'obtenir une équation canonique.

Pour montrer les avantages que peut présenter l'équation réduite (8), nous allons chercher quelles relations doivent vérifier les coefficients pour que cette équation admette un facteur intégrant λ, fonction de la seule variable X. Appelons Φ le premier membre de (7). L'expression $\lambda\Phi$ doit être la dérivée exacte d'une fonction de la forme

$$G_2 Y'^2 + 2 G_3 Y' Y + G_4 Y^2 + 2 H_0 Y' + 2 H_1 Y + H_2.$$

En identifiant la dérivée de cette expression par rapport à X avec le produit $\lambda\Phi$, on trouve (Appell, *loc. cit.*, p. 397)

$$G_3 = 0, \qquad \frac{dG_2}{dX} = 0, \qquad G_2 = \lambda, \qquad H_0 = 0:$$

G_2 est donc constant ainsi que λ. On obtient aussi

$$H = \frac{dL}{dX}, \qquad B = \frac{dA}{dX}.$$

En supposant $\lambda = 1$, on trouve enfin

$$G_4 = L, \qquad H_1 = A, \qquad \frac{dH_2}{dX} = C.$$

La relation $B = \frac{dA}{dX}$, en tenant compte de $H = \frac{dL}{dX}$, exprime que les deux invariants absolus

$$HA - LB, \qquad A\frac{dL}{dX} - L\frac{dA}{dX}$$

sont égaux. La forme canonique devient

$$\frac{dL}{dX} Y^2 + 2 Y'' Y' + 2 L Y' Y + 2 A Y' + 2 \frac{dA}{dX} Y + C = 0,$$

équation dont le premier membre est la dérivée de

$$Y'^2 + L Y^2 + 2 A Y + \int C\, dX.$$

12. Les équations de la première classe sont représentées par

$$(10)\quad \begin{cases} a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_2 y'' y + 2b_3 y' y \\ \qquad + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0. \end{cases}$$

Par le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

cette équation devient

$$\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_2 \eta'' \eta + 2\beta_3 \eta' \eta + 2\gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + 2\gamma_2 \eta + \delta_0 = 0,$$

où

$$\alpha_2 = a_2 \mu^2 u^2,$$
$$\beta_2 = b_2 \mu^2 u^2,$$
$$\beta_3 = (u\mu' + 2\mu u') b_2 u + (a_2 u' + b_3 u)\mu u,$$
$$\gamma_0 = (b_2 v + c_0)\mu^2 u,$$
$$\gamma_1 = (u\mu' + 2\mu u')(b_2 v + c_0) + (a_2 v' + b_3 v + c_1)\mu u,$$
. . . .

On obtiendra une équation canonique en donnant à u, μ, v les valeurs particulières U, M, V qui annulent β_3 et γ_0 et qui rendent égaux les coefficients γ_1 et β_2. On a ainsi

$$b_2\left(\frac{M'}{M} + \frac{2U'}{U}\right) + a_2 \frac{U'}{U} + b_3 = 0,$$

$$V = -\frac{c_0}{b_2},$$

$$MU = \frac{a_2(c_0 b'_2 - b_2 c'_0) + b_2(c_1 b_2 - c_0 b_3)}{b_2^3}.$$

En posant

$$y = YU + V, \qquad \frac{dX}{dx} = M$$

et en divisant tous les termes par la valeur du coefficient β_2, on a

l'équation canonique

$$(11)\qquad AY'^2 + BY^2 + 2Y''Y + 2Y' + 2CY + D = 0.$$

A est l'invariant absolu suivant

$$A = \frac{a_2}{b_2}.$$

Quand cet invariant A est égal à -4, c'est-à-dire quand $a_2 + 4b_2 = 0$, l'intégrale générale peut être de la forme

$$Y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{D_1 v_1 + D_2 v_2} + w_1,$$

où les fonctions u_1, u_2 sont linéairement indépendantes ainsi que v_1, v_2. Les constantes C_1, C_2, D_1, D_2 sont liées par une relation linéaire et homogène. Nous avons déjà résolu cette équation dans un cas particulier, celui où l'équation différentielle n'a pas de terme indépendant de Y. La fonction w_1 était alors nulle. Nous avons effectué cette résolution sans nous servir de forme canonique, en remarquant seulement que les deux équations

$$\varphi = -4b_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_2 y'' y + 2b_3 y' y = 0,$$
$$\psi = 2(c_0 y'' + c_1 y' + c_2 y) = 0$$

doivent admettre une intégrale commune et que de plus l'expression

$$\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx}$$

doit se décomposer en deux facteurs dont l'un, du troisième ordre, homogène et du second degré en y, y', y'', y''', doit fournir, en l'égalant à zéro, une équation différentielle dont l'intégrale générale est

$$(12)\qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{D_1 v_1 + D_2 v_2}$$

(Thèse, Chap. IV, p. 119).

Nous avons également trouvé (*ibid.*, p. 45) quelle relation devaient vérifier les invariants de cette équation homogène pour qu'il en soit ainsi. Remarquons, en passant, qu'on peut utiliser ici un procédé indiqué par M. Appell pour rendre une équation homogène par rapport à la fonction et à ses dérivées (*loc. cit.*, p. 388).

Soit λ un facteur constant et posons

$$y = \lambda z.$$

En éliminant λ entre l'équation transformée et sa dérivée par rapport à x, nous obtiendrons une équation homogène. Si l'on opère ainsi sur l'équation

$$\varphi + \psi = 0,$$

on aura à éliminer λ entre les deux équations

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + \lambda\frac{d\psi}{dx} = 0,$$

on obtient

$$(13) \qquad \psi\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Si l'équation du second ordre $\varphi + \psi = 0$ admet comme intégrale générale l'expression (12), où les constantes sont liées par une équation linéaire et homogène, l'équation (13) aura comme intégrale générale cette même expression où les constantes sont arbitraires. Or, de (12), par dérivation et par élimination des constantes, on tire une équation différentielle homogène du troisième ordre et du second degré; l'expression (13) étant du troisième degré doit se décomposer en un produit de deux facteurs. C'est ce que nous avions démontré d'une autre manière.

Dans le cas où d_0 n'est pas nul, si l'intégrale générale de l'équation est

$$y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{D_1 v_1 + D_2 v_2} + w_1,$$

où les constantes C_1, C_2, D_1, D_2 sont liées par une relation linéaire et

homogène, on sera ramené au cas précédent de la façon suivante. Si l'on effectue le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

on doit pouvoir déterminer u et v de façon à annuler α_1, γ_2 et δ_0. En déterminant μ de telle sorte que γ_1 soit aussi nul, on obtiendra une équation de la forme

$$2\beta_2(\eta''\eta - 2\eta'^2) + 2\beta_3\eta'\eta + 2\gamma_0\eta'' = 0.$$

On sait ensuite reconnaître si une telle équation a une intégrale générale de la forme (12) et la trouver quand elle existe (Thèse, p. 125).

Un autre type d'équations pour lesquelles l'invariant A est égal à -4, est celui dont l'intégrale générale est

$$(14) \qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3}{C_1 v_1 + C_2 v_2}.$$

Cette expression ne renferme que deux constantes arbitraires $\frac{C_2}{C_1}$, $\frac{C_3}{C_1}$. De plus, on peut, sans nuire à la généralité, supposer $u_3 = 1$. Nous allons chercher quelles relations doivent vérifier les invariants de l'équation canonique dans ce cas. L'équation différentielle dont l'intégrale est (14) s'obtient en éliminant C_1, C_2, C_3 entre les trois équations suivantes :

$$C_1(v_1 y - u_1) + C_2(v_2 y - u_2) = C_3,$$
$$C_1[(v_1 y)' - u_1'] + C_2[(v_2 y)' - u_2'] = 0,$$
$$C_1[(v_1 y)'' - u_1''] + C_2[(v_2 y)'' - u_2''] = 0;$$

d'où

$$[(v_1 y)' - u_1'][(v_2 y)'' - u_2''] - [(v_2 y)' - u_2'][(v_2 y)'' - u_1''] = 0.$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned}
2y'^2(v_1 v_2' - v_2 v_1') + y^2(v_1' v_2'' - v_2' v_1'') + y''y(v_2 v_1' - v_1 v_2') \\
+ y'y(v_1 v_2'' - v_2 v_1'') + y''(v_1 u_2' - v_2 u_1') \\
+ y'[v_2 u_1'' - v_1 u_2'' + 2(v_1' u_2' - v_2' u_1')] \\
+ y(v_2' u_1'' - v_1' u_2'' + u_2' v_1'' - u_1' v_2'') + u_1' u_2'' - u_2' u_1'' = 0.
\end{aligned}$$

Identifions avec l'équation canonique (11), nous avons d'abord

$$A = -4;$$

puis

$$v_1 v''_2 - v_2 v''_1 = 0, \qquad v_1 u'_2 - v_2 u'_1 = 0,$$

$$v_2 v_1 - v_1 v_2 = v_2 u''_1 - v_1 u''_2 + 2(v'_1 u'_2 - v'_2 u'_1).$$

Cette dernière relation, en tenant compte de

$$v'_1 u'_2 - v'_2 u'_1 = v_2 u''_1 - v_1 u''_2,$$

se transforme en

$$v_2 v'_1 - v_1 v'_2 = 3 v'_1 u'_2 - v'_2 u'_1;$$

d'où, en résolvant les deux équations suivantes,

$$v_1 u'_2 - v_2 u'_1 = 0,$$

$$v'_1 u'_2 - v'_2 u'_1 = \frac{v_2 v'_1 - v_1 v'_2}{3},$$

on tire

$$u'_1 = \frac{v_1}{3}, \qquad u'_2 = \frac{v_2}{3}.$$

Le reste de l'identification s'achève facilement et l'on trouve

$$C = 0, \qquad D = -\frac{2}{9}.$$

De plus, on peut considérer v_1 et v_2 comme solutions de l'équation

$$v'' = \alpha v,$$

en vertu de la relation $v_1 v''_2 - v_2 v''_1 = 0$. Alors on a

$$B = 2\alpha.$$

L'équation considérée sera donc intégrable quand on saura résoudre l'équation différentielle linéaire

$$2v'' - Bv = 0.$$

Car, si v_1 et v_2 sont deux intégrales particulières de cette équation linéairement indépendantes, on posera

$$u_1 = \frac{1}{3}\int v_1\,dX, \qquad u_2 = \frac{1}{3}\int v_2\,dX.$$

L'équation

$$-4Y'^2 + BY^2 + 2Y''Y + 2Y' - \frac{2}{9} = 0$$

a pour intégrale

$$Y = \frac{1}{3}\,\frac{C_1\int v_1\,dX + C_2\int v_2\,dX + C_3}{C_1 v_1 + C_2 v_2}.$$

En donnant à B la valeur 2, on obtient pour l'équation

$$-2Y'^2 + Y^2 + Y''Y + Y' - \frac{1}{9} = 0$$

l'intégrale

$$Y = \frac{1}{3}\,\frac{C_1 e^X + C_2 e^{-X} + C_3}{C_1 e^X - C_2 e^{-X}},$$

ce qui est facile à vérifier.

On obtient donc ce résultat remarquable. En posant

$$\frac{1}{Y} = 3\frac{u'}{u} \qquad \text{ou} \qquad u' = \frac{du}{dX},$$

l'équation transformée en u a pour intégrale générale

$$u = C_1\int v_1\,dX + C_2\int v_2\,dX + C_3.$$

Cette équation n'est donc autre que

$$2u''' - Bu' = 0.$$

Les équations considérées ont donc une certaine analogie avec l'équation de Riccati.

15. On pourrait ranger dans une dernière classe les équations du second ordre et du second degré de la forme

$$a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_3 y'y + 2c_0 y'' + 2c_1 y' + 2c_2 y + d_0 = 0.$$

On suppose alors c_0 différent de zéro, ce qui n'était pas nécessaire dans les cas précédents. En posant

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

cette équation devient

$$\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_3 \eta' \eta + 2\gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + 2\gamma_2 \eta + \delta_0 = 0,$$

où

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_2 \mu^2 u^2, \\
\alpha_1 &= a_2 u'^2 + a_1 u^2 + 2 b_3 u' u, \\
\beta_3 &= (a_2 u' + b_3 u) \mu u, \\
\gamma_0 &= c_0 \mu^2 u, \\
\gamma_1 &= c_0 (u \mu' + 2 \mu u') + (a_2 v' + b_3 v + c_1) \mu u, \\
\gamma_2 &= (a_2 u' + b_3 u) v' + (b_3 u' + a_1 u) v + c_0 u'' + c_1 u' + c_2 u, \\
\delta_0 &= a_2 v'^2 + a_1 v^2 + 2 b_3 v' v + 2 c_0 v'' + 2 c_1 v' + 2 c v + d_0.
\end{aligned}
$$

Contentons-nous d'indiquer rapidement comment on pourra obtenir une équation canonique :

1° Si a_2 est différent de zéro, on annulera β_3, γ_1 et γ_2. Cela suppose encore $a_2 a_1 - b_3^2 \neq 0$. Si cette quantité était nulle, on obtiendrait une première équation réduite en annulant β_3 et γ_1, α_1 serait aussi nul. Puis on égalerait α_2 et γ_0^2. La valeur de δ_0 montrerait alors comment on pourrait former une équation canonique.

2° Soit $a_2 = 0$, mais b_3 différent de zéro. On annulera α_1 et γ_1, puis on égalera β_3 et γ_0.

3° Si b_3 était nul, on annulerait γ_1 et γ_2 et l'on égalerait α_1 et γ_0.

14. En résumé, pour obtenir une équation canonique, nous établissons certaines relations entre les coefficients de l'équation transformée par le changement de fonction et de variable,

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

Ces relations fournissent, pour déterminer v, une équation du premier degré en v. Les fonctions u et μ ont été déterminées, soit par des équations différentielles linéaires, homogènes et du premier ordre, soit par des équations algébriques binômes. Dans le premier cas, les invariants absolus, coefficients de l'équation canonique, contiennent des exponentielles; dans le second, ce sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées, telles que certaines de leurs puissances sont des fonctions rationnelles de ces coefficients.

Pour obtenir l'équation du premier degré fournissant la valeur de v, nous avons réduit l'équation proposée à la forme la plus simple possible. Nous avons considéré le plus simple des coefficients de cette équation réduite qui fût de la forme

$$M^p U^q (AV + B).$$

A était un invariant tel que l'on eût, suivant la notation adoptée,

$$A_1 = \mu^p u^{q+1} A.$$

Alors l'expression B_1 vérifie la relation

$$B_1 = \mu^p u^{q+1} (Av + B).$$

Nous avons déterminé v de façon à annuler B_1.

Dans d'autres cas, l'équation réduite ne nous a fourni, comme coefficient le plus simple, qu'une expression de la forme

$$M^p U^q (\mathcal{A} V' + \mathcal{B} V + \mathcal{C}),$$

$\mathcal{A}$ était encore un invariant tel que

$$\mathcal{A}_1 = \mu^p u^{q+1} \mathcal{A},$$

$\mathcal{B}_1$ vérifiait la relation

$$\mathcal{B}_1 = \mu^p u^{q+1} (\mathcal{A} u' + \mathcal{B} u).$$

Alors l'expression $\mathcal{C}_1$ jouissait de la propriété exprimée par

$$\mathcal{C}_1 = (\mathcal{A}c' + \mathcal{B}c + \mathcal{C}).$$

En donnant à c la valeur qui annule $\mathcal{C}_1$, on était ramené au cas précédent, c'est-à-dire au cas d'une équation réduite fournissant un coefficient de la forme

$$M^p U^q (AV + B).$$

Il y a tout lieu de croire que ces remarques constituent une loi générale applicable aux équations d'ordres et de degrés supérieurs. On pourrait donc, dans tous les cas, à l'aide d'équations réduites successives, déterminer une équation canonique dont les coefficients seraient des invariants absolus, soient transcendants, soient algébriques par rapport aux coefficients de l'équation différentielle considérée et à leurs dérivées.

Commentaire aux principes de la Thermodynamique ;

PAR M. P. DUHEM.

INTRODUCTION.

Toute science avance comme par une série d'oscillations.

A certaines époques, on discute les principes de la science; on examine les hypothèses qu'ils supposent, les restrictions auxquelles ils sont soumis. Puis, pour un temps, ces principes semblent bien établis; alors les efforts des théoriciens se portent vers la déduction des conséquences; les applications se multiplient, les vérifications expérimentales deviennent nombreuses et précises.

Mais ce développement, d'abord rapide et facile, devient par la suite plus lent et plus pénible; le sol, trop cultivé, s'appauvrit; alors surgissent des obstacles, que les principes établis ne suffisent pas à lever, des contradictions qu'ils ne parviennent pas à résoudre, des problèmes qu'ils sont incapables d'aborder. A ce moment, il devient nécessaire de revenir aux fondements sur lesquels repose la science, d'examiner à nouveau leur degré de solidité, d'apprécier exactement ce qu'ils peuvent porter sans se dérober. Ce travail fait, il sera possible d'édifier de nouvelles conséquences de la théorie.

Les applications de la Thermodynamique ont été nombreuses depuis trente ans; aussi, de l'aveu de tous ceux qu'intéresse cette science, une revision de ces principes est devenue nécessaire. C'est l'essai d'une semblable revision que nous soumettons aujourd'hui aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*.

Toute théorie physique repose sur un certain nombre de définitions et d'hypothèses qui sont, dans une certaine mesure, arbitraires; il est donc permis de chercher à exposer une semblable théorie dans un ordre logique; mais prétendre qu'on lui a donné le seul ordre logique dont elle soit susceptible serait une prétention injustifiable. Cette prétention, nous nous garderons bien de l'avoir. Nous sommes convaincu que l'on peut enchaîner les principes de la Thermodynamique d'une manière autre que celle que nous avons adoptée et cependant aussi satisfaisante, plus satisfaisante peut-être. Nous n'oserions même espérer qu'aucune lacune ne subsiste dans l'enchaînement que nous avons cherché à établir.

Si la question que nous avons examinée paraît plutôt philosophique que mathématique, qu'il nous soit permis d'invoquer, pour justifier son introduction dans ce Journal, l'intérêt manifesté tout récemment encore, par un analyste illustre, pour les recherches qui concernent les principes de la Thermodynamique; ce sera notre excuse auprès des mathématiciens.

PREMIÈRE PARTIE.

LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

1. *Du mouvement absolu.* — Nous supposerons faites la Géométrie et la Cinématique; nous emprunterons à ces sciences tous les résultats dont nous aurons besoin.

L'expérience nous permet de constater si deux parties de la matière se sont déplacées l'une par rapport à l'autre, en sorte que la notion de *mouvement relatif* est une notion expérimentale; c'est de cette notion que traite la Cinématique.

Mais cette notion est insuffisante pour l'objet que nous nous proposons de traiter. Les hypothèses que nous aurons à énoncer, les lois que nous aurons à formuler, ne feront pas intervenir seulement les mouvements relatifs des différentes parties de la matière les unes par rapport aux autres. Elles feront intervenir les mouvements des différentes parties de la matière par rapport à un certain trièdre de référence idéal, que l'on suppose tracé quelque part. Il arrivera souvent que des propositions qui concernent les mouvements relatifs à ce trièdre de référence particulier, et que nous regardons comme exactes, deviendraient manifestement fausses si l'on y supposait les mouvements rapportés à un autre trièdre de référence, animé par rapport au premier d'un mouvement quelconque.

Nous donnerons à ce trièdre particulier, auquel seront rapportés tous les mouvements dont nous parlerons, le nom de *trièdre absolument fixe;* les axes de ce trièdre seront les *axes absolument fixes;* un mouvement rapporté à ce trièdre particulier prendra le nom de *mouvement absolu;* une portion de matière dont les divers points ne seront animés d'aucun mouvement par rapport à ce trièdre sera dite en *repos absolu;* en particulier, un trièdre immobile par rapport au trièdre absolument fixe sera un nouveau trièdre absolument fixe.

Nous ne pouvons pas juger d'une manière indiscutable si un trièdre donné est ou n'est pas absolument fixe; tout jugement à cet égard est subordonné à la croyance en la légitimité de quelque hypothèse. Si nous regardons comme exacte une certaine hypothèse où intervient la considération des mouvements absolus, et si cette hypothèse, appliquée aux mouvements relatifs à un certain trièdre, conduit à des résultats inexacts, nous déclarons que ce trièdre n'est pas absolument fixe. Mais cette conclusion n'est forcée qu'autant que nous tenons à conserver l'hypothèse qui nous a servi de criterium; nous serions en droit de regarder comme fixe le trièdre dont il s'agit si nous consentions à rejeter l'hypothèse.

2. *Des corps et des mélanges ou combinaisons.* — Nous appellerons *corps* un espace linéairement connexe rempli, *d'une manière continue,* par une certaine partie de la matière.

Nous ne discuterons pas la question de savoir si les corps sont réel-

lement continus, ou formés de parties discontinues très petites séparées par des intervalles vides également très petits.

En Physique, il nous est à la fois impossible et inutile de connaître la constitution réelle de la matière. Nous cherchons simplement à concevoir un système abstrait qui nous fournisse une image des propriétés des corps. Pour construire ce système, nous sommes libres de représenter un corps qui nous semble continu soit par une distribution continue de matière dans un certain espace, soit par un ensemble discontinu d'atomes très petits. Le premier mode de représentation conduisant, dans toutes les parties de la Physique, à des théories plus simples, plus claires et plus élégantes, nous l'adopterons de préférence au second.

Considérons deux corps A, B, qui, à un certain instant t, occupent des espaces a, b, n'ayant aucune partie commune; ces deux corps ne sont pas toujours et forcément distincts; les parties de la matière qui les forment peuvent à un instant t', distinct de t, antérieur ou postérieur à t, fournir un corps unique C, occupant l'espace c; cela, de telle façon que tout élément dw de l'espace c renferme, à l'instant t', une partie de la matière qui, à l'instant t, forme le corps A, et aussi une partie de la matière qui, à l'instant t, forme le corps B; la première partie occupant, à l'instant t, un certain élément de volume dv de l'espace a; la seconde partie occupant, à l'instant t, un certain élément de volume dv' de l'espace b.

Dans le cas dont nous venons de parler, on dit que le corps C résulte soit du *mélange*, soit de la *combinaison* des deux corps A et B.

Beaucoup de physiciens se refusent à admettre la possibilité de la combinaison ou du mélange tel que nous venons de le définir. Ils regardent comme impossible cette pénétration intime par laquelle la matière qui remplit chaque élément de volume du corps continu C provient de l'union entre la matière que renfermait un élément de volume du corps continu A et la matière que renfermait un élément de volume du corps continu B. C'est cette impossibilité qu'ils nomment l'*impénétrabilité de la matière*.

Pour ces physiciens, les mots *mélange, combinaison* ne représentent que des apparences. Lorsque nous croyons voir les deux corps

A et B s'unir pour former un nouveau corps C, les parties extrêmement petites dont l'ensemble discontinu constitue chacun de ces deux corps demeurent, en réalité, distinctes; les petites parties du corps A s'interposent simplement aux petites parties du corps B, sans que l'espace occupé par l'une des parties du corps A ait aucun domaine commun avec l'espace occupé par l'une des parties du corps B.

Des raisons analogues à celles qui nous ont fait regarder comme continue la matière qui forme un corps nous conduisent à repousser cette manière de concevoir le mélange ou la combinaison et à adopter la définition que nous avons donnée tout à l'heure.

Considérons un corps C, formé par le mélange de deux corps A et B. La matière qui, à l'instant t, remplit l'élément de volume $d\varpi$ du corps C est composée d'une partie p de la matière qui formait le corps A et d'une partie q de la matière qui formait le corps B. A un autre instant t', ces deux parties p et q ne sont pas forcément unies entre elles au sein d'un même élément de volume. La matière qui constitue la partie p peut remplir un élément de volume $d\varpi'$, où elle est soit libre, soit unie à une partie q', différente de q, de la matière qui formait le corps B; en même temps, la matière qui constitue la partie q peut remplir un autre élément de volume $d\varpi''$, où elle est soit libre, soit unie à une partie p'', différente de p, de la matière qui formait le corps A.

Ainsi, lorsqu'un corps C est un mélange de deux corps, la matière qui remplit chaque élément de volume de ce corps est formée par l'union de deux parties différentes, et *ces deux parties peuvent être animées de mouvements différents;* en sorte qu'en chaque point du mélange il peut y avoir lieu de considérer deux vitesses différentes, chacune de ces vitesses étant relative à l'une des parties du mélange.

Tout ce que nous venons de dire d'un mélange de deux corps s'entend aussi bien d'un mélange d'un nombre quelconque de corps.

5. *Du corps isolé dans l'espace.* — L'expérience nous montre que, d'un corps donné, nous pouvons éloigner tous les corps qui l'environnent à un instant donné. L'existence de ces derniers nous apparaît donc comme n'ayant aucune liaison nécessaire avec l'existence du premier. Nous arrivons ainsi à concevoir la possibilité de

l'existence de ce corps isolé dans l'espace illimité en tous sens et absolument vide.

Cette conception du corps isolé dans un espace illimité et absolument vide est une pure abstraction. Jamais l'expérience ne nous offre un corps qui ne soit, de toutes parts, contigu à d'autres corps, et la Physique nous conduit à admettre que, lors même que nous parviendrions à enlever tous les corps solides, liquides ou gazeux que nous pouvons saisir directement ou indirectement, de manière à faire le *vide physique* dans l'espace qui environne un certain corps, cet espace serait encore rempli par une certaine matière que l'on nomme l'*éther*. C'est donc, je le répète, en vertu d'une pure abstraction que nous pouvons concevoir un corps comme existant seul dans l'espace. Mais je ne crois pas qu'il soit possible de construire la Physique sans faire usage de cette abstraction.

4. *Des variables qui définissent l'état et le mouvement d'un système.* — Considérons un ensemble de corps isolé dans l'espace. Cet ensemble de corps peut, d'un instant à l'autre, changer de position, de forme, d'état, etc. Considérons-le tel qu'il est à l'instant t, abstraction faite de ce qu'il était à tout instant antérieur à t, de ce qu'il sera à tout instant postérieur à t. A cet instant t, il possède certaines propriétés. Pour représenter ces propriétés, la Physique théorique définit certaines grandeurs algébriques et géométriques, puis elle établit entre ces grandeurs des relations qui sont le symbole des lois physiques auxquelles le système est assujetti.

Ces grandeurs peuvent être définies de façons très diverses. La Géométrie, par exemple, nous apprend de quelle manière on peut, par la définition de certaines grandeurs, en nombre limité ou illimité, déterminer la forme et la position de chacune des parties matérielles qui composent le système. D'autres grandeurs, qui en représentent les propriétés physiques et chimiques, sont définies au cours des diverses théories dont la Physique est composée. Dans ce Chapitre même, nous montrerons comment la Physique définit une de ces grandeurs, particulièrement importante, la *température;* au Chapitre suivant, nous en rencontrerons une autre, la *masse*.

Dans l'étude d'un système, on peut avoir intérêt à considérer en

même temps plusieurs grandeurs que leur définition relie les unes aux autres : ainsi, on peut avoir à parler de la masse ([1]) d'un corps, de son volume et de sa densité, alors que par *définition*, la densité d'un corps est le quotient de sa masse par son volume. Ces grandeurs, reliées les unes aux autres par leur définition même, ne sont pas indépendantes.

Des grandeurs qui représentent les propriétés d'un système à un instant donné sont *indépendantes* si la définition de chacune d'elles n'implique aucune relation entre la valeur de celle-ci à l'instant t et la valeur de chacune des autres au même instant t. Ainsi le volume et la masse d'un corps seront deux grandeurs indépendantes. De même, les composantes du flux électrique en chaque point d'un conducteur et la densité électrique, en chaque point du même conducteur, sont des grandeurs indépendantes; sans contredire ni à la définition de la densité électrique, ni à la définition du flux électrique, on peut, à l'instant t, attribuer des valeurs arbitraires à la première et aux trois composantes du second.

Nous avons dit que plusieurs grandeurs étaient indépendantes si la définition de chacune d'elles n'impliquait aucune relation entre la valeur de celle-ci *à l'instant t* et la valeur de chacune des autres *au même instant t*. Mais, tandis que les valeurs des variables indépendantes peuvent toutes être choisies arbitrairement à un instant isolé t, dans certains cas, il ne serait pas permis de choisir arbitrairement leurs valeurs à tous les instants d'un certain intervalle de temps. Ainsi, pour l'instant t, *considéré isolément*, on peut choisir arbitrairement la densité électrique et les composantes du flux électrique en chaque point d'un conducteur. Mais on ne pourrait, sans absurdité, en faire autant à *tous les instants* de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$. En effet, la définition même du flux électrique montre que si l'on connaît, en tout point d'un conducteur : 1° les composantes du flux électrique à tout instant de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$; 2° la densité électrique à un instant particulier de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$, la valeur de

---

([1]) Il est bien entendu que, *pour donner des exemples*, nous sommes obligé d'anticiper, puisque aucune grandeur représentant une propriété physique n'a été définie dans ce qui précède.

la densité électrique est déterminée à tout instant de l'intervalle $(t_1 - t_0)$, en sorte que cette valeur ne peut plus être choisie arbitrairement.

Dans tout ce que nous venons de dire, il faut bien observer que, lorsque nous parlons de *dépendance* entre diverses grandeurs, nous n'entendons jamais parler que d'une dépendance résultant de la définition de ces grandeurs et non pas d'une dépendance résultant d'une loi physique; en sorte que des grandeurs *logiquement* indépendantes peuvent ne pas être *physiquement* indépendantes; leur donner des valeurs arbitraires est une opération qui, sans être absurde, peut être contraire aux lois naturelles.

Parmi les grandeurs, indépendantes ou non, qui servent à représenter un système à un instant isolé t, il en est que leur définition astreint à avoir la même valeur pour un système donné, quel que soit l'instant que l'on considère isolément. Telle est, par exemple, la masse du système; telle est encore sa charge électrique totale. Il en est d'autres qui peuvent, pour un même système considéré, à des instants différents, avoir des valeurs différentes. On dit que les premières définissent la *nature* du système et que les secondes en définissent l'*état*.

Considérons les grandeurs indépendantes qui suffisent à représenter *complètement* les propriétés d'un système à l'instant isolé t. Les unes, A, B, ..., L, définissent la nature du système; les autres, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, définissent son état.

Si l'on conserve aux quantités A, B, ..., L leurs valeurs et si l'on donne aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ d'autres valeurs $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'$, on aura la représentation d'un autre état du même système.

Imaginons ainsi une suite continue d'états différents du système, c'est-à-dire une suite continue de groupes de valeurs des quantités α, $\beta, \ldots, \lambda$. Fixons successivement notre attention sur ces divers états, dans l'ordre qui permet de passer d'une manière continue de l'un à l'autre. Pour désigner cette *opération tout intellectuelle,* nous dirons que nous imposons au système une *modification virtuelle*.

Toute modification réalisable d'un système correspond à des variations des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ compatibles avec les définitions de ces quantités; la suite des états par laquelle elle fait passer le système constitue donc une modification virtuelle du système.

Inversement, une modification virtuelle peut-elle toujours être regardée comme la suite des états qu'un système traverse durant une modification réelle? Si l'on se souvient que les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, laissées arbitraires par leurs définitions, peuvent être liées les unes aux autres par des lois physiques, on voit qu'une modification virtuelle, bien que compatible avec les définitions des variables propres à représenter les divers états du système, peut être en opposition avec certaines lois physiques, et, par conséquent, être physiquement irréalisable.

Il y a plus : les valeurs qu'on peut attribuer aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à un instant isolé t, sont arbitraires; mais il n'en est plus toujours de même des valeurs qu'on peut attribuer à ces variables aux divers instants d'un certain intervalle de temps; si donc on regarde la suite de groupes de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, qui représentent les divers états du système durant une modification virtuelle, comme une suite d'états *qui se succèdent* durant un certain intervalle de temps, on pourra fort bien se heurter à une contradiction avec la définition des variables α, $\beta, \ldots, \lambda$. Si, par exemple, dans la modification virtuelle que l'on considère, on suppose qu'un conducteur est parcouru par des courants non uniformes, et si, d'autre part, on regarde la densité électrique en chaque point comme invariable, on obtient une suite continue d'états dont la succession dans le temps serait contradictoire avec la définition du flux électrique. Ainsi les définitions mêmes des variables α, $\beta, \ldots, \lambda$ peuvent suffire à rendre certaines modifications virtuelles irréalisables.

Nous avons dit que les constantes A, B, ..., L et les variables α, $\beta, \ldots, \lambda$ représentaient les propriétés physiques du système considéré à l'instant t, abstraction faite des propriétés du système aux instants qui précèdent ou qui suivent t. Or la considération d'un système à un instant isolé, abstraction faite des instants qui ont précédé celui-là ou qui le suivent, ne saurait permettre de reconnaître si le corps est en repos ou en mouvement. Le mot *mouvement* ne prend de sens pour un système qu'autant que l'on envisage ce système pendant un certain laps de temps, si court soit-il. Par conséquent, les valeurs des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, nécessaires et suffisantes pour représenter les propriétés du système à l'instant isolé t, ne suffiront pas, en général, à nous indiquer si le système est en mouvement et quel est ce mouvement.

Nous dirons que *le mouvement* du système à l'instant *t est défini* si l'on connaît non seulement l'état du système à cet instant, mais encore la grandeur et la direction de la vitesse dont est animée la matière remplissant chacun des éléments de volume du système; dans le cas où un élément de volume serait rempli par un mélange de plusieurs substances, il faudrait connaître la vitesse animant chacune des parties de matière qui composent ce mélange.

Considérons une partie infiniment petite de la matière qui forme un système. Les coordonnées x, y, z, qui, à l'instant t, marquent la position d'un de ses points par rapport au trièdre absolument fixe, sont connues lorsqu'on connaît les valeurs des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à cet instant; en effet, ces variables connues, on doit connaître la forme, la position et les propriétés que possèdent, à l'instant t, toutes les parties du système. Nous devons donc avoir, pour déterminer x, y, z, des équations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda),\\ y &= \psi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda),\\ z &= \chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda);\end{aligned}\right.$$

φ, ψ et χ sont trois fonctions dont la forme dépend de la nature du système, et aussi de la particule matérielle considérée. Ces relations ne dépendent pas explicitement du temps t, car si, à deux instants différents, t et t', les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ reprennent les mêmes valeurs, comme ces variables suffisent à déterminer l'état du système, le système redeviendra identique à lui-même, et les coordonnées x, y, z reprendront les mêmes valeurs.

Des équations (1), on déduit les égalités

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt},\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \ldots + \frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Ces égalités (2) nous montrent que les composantes de la vitesse

d'une partie élémentaire quelconque du système sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$. Ces fonctions dépendent, en outre, d'une manière quelconque des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Ainsi, pour définir le mouvement du système à l'instant t, il est suffisant d'adjoindre aux valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$. Cela est-il en même temps nécessaire?

Dans un grand nombre de cas, toutes les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ne figurent pas dans les équations (1), ni, par conséquent, toutes les quantités $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$, dans les équations (2). Nous aurons parfois à distinguer celles des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ qui figurent dans les équations (1) de celles qui n'y figurent pas; nous conserverons pour les premières lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et, pour les secondes, nous adopterons les lettres $a, b, \ldots, l$.

Nous dirons qu'un système isolé est *en repos* lorsque la matière qui le compose est immobile, son état pouvant d'ailleurs subir avec le temps des variations qui laissent dans la même position chacune des parties qui le composent. Pour un pareil système, les quantités α, $\beta, \ldots, \lambda$ gardent des valeurs indépendantes du temps, les quantités a, $b, \ldots, l$, pouvant d'ailleurs subir avec le temps des variations quelconques.

Nous dirons qu'un système isolé est *en équilibre* si son état ne varie pas avec le temps. Pour un système en équilibre, les quantités a, $b, \ldots, l$, aussi bien que les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ont des valeurs indépendantes du temps.

Imaginons qu'un système parte d'un certain état caractérisé par certaines valeurs déterminées des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et par une certaine vitesse bien déterminée de chacune des parties matérielles infiniment petites en lesquelles on peut le supposer divisé; que ce système subisse une série plus ou moins considérable de modifications; qu'enfin, au bout d'un certain temps, il soit ramené à un état identique à l'état initial, c'est-à-dire à un état où les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ont les mêmes valeurs que dans l'état initial, où la vitesse de chaque partie élémentaire est la même que dans l'état initial. La série de transformations

subie par le système prendra le nom de *cycle fermé*. Nous aurons très souvent occasion, au cours de ce travail, de considérer de semblables transformations.

Il est entendu que, lorsqu'un système subit une transformation quelconque, la vitesse de chacune des parties élémentaires en lesquelles on peut le supposer divisé varie avec le temps d'une manière continue.

Dans la plupart des considérations précédentes, nous avons supposé l'état du système défini par les valeurs d'un nombre limité de paramètres variables. On s'aperçoit aisément que cette hypothèse a pour but unique de simplifier le langage, mais que tout ce que nous avons dit s'étend sans peine aux systèmes dont la définition exigerait la connaissance d'une infinité de paramètres variables.

5. *Des systèmes indépendants.* — Considérons un système de corps S, isolé dans l'espace, et soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les variables qui, à chaque instant isolé t, déterminent complètement son état.

Supposons que les corps qui forment ce système puissent se partager en deux groupes S_1, S_2.

Supposons, en outre, que les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ puissent se partager en deux groupes $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, jouissant des propriétés suivantes :

1° Rien, dans la définition des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, ne suppose l'existence ou les propriétés du groupe de corps S_2 ou des variables α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$;

2° Rien, dans la définition des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, ne suppose l'existence ou les propriétés du groupe de corps S_1 ou des variables α_1, $\beta_1, \ldots, \lambda_1$.

Si ces conditions sont réalisées, on pourra supposer que le groupe de corps S_1 est isolé dans l'espace, et que, à chaque instant d'un certain laps de temps, les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ ont, pour ce groupe isolé, des valeurs identiques à celles qu'elles auraient, à l'instant correspondant d'un laps de temps égal, au sein du système S. Cette hypothèse ne contredira en rien la définition des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$.

De même, on pourra supposer que le groupe de corps S_2 est isolé dans l'espace, et que, à chaque instant d'un certain laps de temps, les variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$ ont, pour ce groupe isolé, des valeurs iden-

tiques à celles qu'elles auraient, à l'instant correspondant d'un laps de temps égal, au sein du système S. Cette hypothèse ne contredira en rien la définition des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

D'ailleurs, les deux hypothèses que nous venons d'indiquer, tout en ne contredisant pas la définition des groupes de variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, peuvent être en opposition avec certaines lois expérimentales.

Lorsque deux groupes de corps, S_1 et S_2, satisferont aux conditions que nous avons énumérées, nous dirons que ces deux groupes constituent *deux systèmes matériels susceptibles d'exister indépendamment l'un de l'autre*, ou, sous une forme plus concise, *deux systèmes indépendants*.

Remarquons que, dans ce cas, les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ suffisent évidemment à fixer l'état du système S_1, sans rien indiquer relativement à l'état du système S_2, et que, inversement, les variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$ suffisent à fixer l'état du système S_2, sans rien indiquer relativement à l'état du système S_1. Ainsi, *lorsque deux systèmes sont indépendants l'un de l'autre, il est possible d'isoler chacun d'eux de l'autre sans changer son état;* dans cet énoncé, répétons-le, le mot *possible* désigne une opération qui n'est pas en contradiction avec les définitions, mais pas nécessairement une opération conforme aux lois physiques.

Éclaircissons tout ce que nous venons de dire par quelques exemples :

1° Le système S est un corps dont nous regardons l'état comme défini lorsque nous connaissons la position, la densité et la température de chacune des parties matérielles infiniment petites qui le composent.

Sans contredire aux définitions de la température et de la densité, nous pouvons, après avoir divisé le corps en deux parties S_1, S_2, supprimer par la pensée la partie S_2 et garder la partie S_1 isolée dans l'espace, en conservant à chacune des parties matérielles infiniment petites qui la composent, la position, la densité et la température qu'elle aurait eues, au même instant, dans le système S; nous pouvons aussi supprimer par la pensée la partie S_1 et garder la partie S_2 isolée dans l'espace, en conservant à chacune des parties matérielles infini-

ment petites qui la composent, la position, la densité et la température qu'elle aurait eues, au même instant dans le système S.

Dans ce cas, qui a une grande importance, les deux systèmes S_1, S_2 sont indépendants.

2° Le système S est formé d'un corps conducteur qui porte certaines charges électriques. La définition de ces charges exige que la somme des charges réparties sur le conducteur S demeure constante pendant le laps de temps que l'on considère; mais, si l'on regarde ce conducteur S comme formé de deux parties contiguës S_1, S_2, la somme des charges réparties sur la portion S_1 pourra fort bien varier d'un moment à l'autre, et aussi la somme des charges réparties sur la portion S_2.

Supposons maintenant que, pendant un certain laps de temps, nous considérions la partie S_2 comme supprimée et la partie S_1 comme isolée dans l'espace. Pourrons-nous, à chaque instant de ce laps de temps, imaginer sur cette partie S_1 une distribution électrique identique à celle qu'elle porterait au même instant, si elle était incorporée dans le système S? Non, car, nous venons de le remarquer, cette distribution donnera, en général, une valeur variable d'un instant à l'autre pour la quantité totale d'électricité que porte S_1; or le conducteur S_1, isolé dans l'espace, doit, d'après la définition des charges électriques, porter une charge électrique totale invariable.

Ainsi, dans le cas que nous venons d'analyser, les deux corps S_1, S_2 ne forment pas deux systèmes indépendants.

3° Le système S est formé d'un corps conducteur qui porte certaines charges électriques et est parcouru par certains courants. Pour fixer les idées, nous supposerons que ces courants sont uniformes. La distribution électrique est alors invariable, tant à la surface du conducteur S qu'à l'intérieur, pendant le laps de temps que l'on considère.

Par une surface σ, coupons le conducteur S en deux parties, S_1, S_2. Pouvons-nous supprimer par la pensée la partie S_2, regarder la partie S_1 comme isolée dans l'espace, et y conserver, pendant tout le laps de temps que nous considérons, une distribution de courants et de charges identiques à celle qui régnait dans cette partie S_1 lors-

qu'elle était incorporée dans le conducteur S ? Évidemment non, car, dans le conducteur S, les divers points de la surface σ portaient une électrisation invariable, tandis que, si la partie S_1 est isolée dans l'espace, les courants qui la traversent feront varier d'un instant à l'autre l'électrisation de la surface σ.

Dans ce cas encore, les deux corps S_1, S_2 ne sont pas des systèmes indépendants.

Il faut bien observer qu'en disant que deux corps S_1, S_2 ne forment pas deux systèmes indépendants, nous ne voulons pas dire que chacun de ces deux corps ne saurait être conçu comme isolé dans l'espace; nous admettons, au contraire, qu'un corps peut toujours, par la pensée, être isolé dans l'espace (*voir* n° 5). Nous voulons dire qu'on ne peut pas admettre que chacun d'eux, isolé dans l'espace, conserve, à chaque instant d'un laps de temps, l'état qu'il présenterait au même instant s'il était incorporé au système total.

Ainsi, dans les deux derniers exemples, le corps S_1 peut être conçu comme isolé dans l'espace; mais ce qui est contradictoire, c'est de lui attribuer alors, pendant un certain temps, la distribution de charges électriques et de courants qu'il porterait pendant le même temps s'il était uni au corps S_2, pour former le système S.

La Physique ne saurait, sans excéder le domaine où ses méthodes s'appliquent légitimement, décider si l'univers est ou non limité. Mais, dans toute question de Physique, on peut raisonner comme si l'univers était formé d'un certain nombre de corps enclos dans une surface fermée d'étendue. On admet, en effet, que, dans l'étude d'un groupe de corps, on peut, sans erreur sensible, considérer comme n'existant pas tous les corps dont la distance à ceux-là surpasse une certaine limite.

Considérons donc cette partie très grande, mais limitée, de l'univers dont il est nécessaire de tenir compte lorsqu'on veut étudier un groupe de corps déterminé S_1 ; soit S cette partie de l'univers; soit S_2 ce qui reste de S lorsqu'on en a retranché S_1. Si les deux groupes de corps S_1, S_2 forment deux systèmes indépendants, nous dirons que le groupe S_1 forme un *système matériel*. C'est toujours dans ce sens bien défini que nous emploierons le mot *système matériel*.

A un semblable système, nous pourrons étendre sans les modifier

les définitions des mots *repos* et *équilibre*, que nous avons données, à la fin du n° 4, pour un système isolé.

6. *De la température.* — Parmi les variables servant à définir l'état d'un système, il en est une dont le rôle, au cours du présent travail, aura une importance toute particulière; cette variable, c'est la *température*. Nous allons, dès maintenant, montrer comment cette variable peut être définie. Cette étude aura d'ailleurs l'avantage de nous montrer de quelle manière le physicien fait correspondre certaines grandeurs aux propriétés physiques d'un système.

Nos organes nous donnent la sensation de corps *chaud* et de corps *froid*, de corps plus chauds ou plus froids les uns que les autres. Cette sensation de chaleur ou de froid, de chaleur plus ou moins grande ou de froid plus ou moins intense, nous la regardons comme le signe d'une certaine propriété que possèdent les corps, et qu'ils possèdent à un degré plus ou moins élevé; nous admettons qu'un corps est chaud, qu'il est plus ou moins chaud qu'un autre, qu'il est froid s'il est moins chaud que notre corps.

Cette propriété des corps que nous caractérisons par les mots : *être chaud, être froid, être plus ou moins chaud*, notre faculté d'abstraction ne tarde pas à lui attribuer des caractères que la sensation ne nous marque pas.

Nous ne pouvons comparer entre eux le degré de chaleur des corps qu'autant que ces corps ne sont ni trop chauds, ni trop froids; au delà d'une certaine limite, dans un sens comme dans l'autre, nos organes seraient lésés ou détruits; nous concevons néanmoins qu'au delà de ces limites les corps continuent à être plus ou moins chauds les uns que les autres.

En comparant nos sensations à celles de nos semblables, nous voyons que, parfois, nous trouvons inégalement chauds deux corps qu'un autre trouve également chauds ou inversement; nous sommes ainsi conduit à admettre que la sensibilité de nos organes est limitée et que, sans être identiques, les degrés de chaleur de deux corps peuvent être assez peu dissemblables pour que nous ne puissions les distinguer.

Un corps chaud ne peut influer sur nos organes que par la partie de

sa surface qui est en contact avec ces organes, et cette surface a toujours une certaine étendue; le temps pendant lequel nous touchons cette surface a toujours une certaine durée; néanmoins, nous admettons que le caractère d'être chaud appartient aussi bien aux parties qui sont à l'intérieur du corps qu'aux parties voisines de la surface; qu'il appartient en propre à chaque partie infiniment petite en lesquelles le corps peut être censé décomposé et à chaque moment infiniment petit de la durée; qu'à un même instant, il varie d'un point à l'autre; qu'en un même point, il varie d'un instant à l'autre.

Les observations les plus vulgaires nous montrent que, dans la plupart des cas, lorsqu'un corps chaud est mis en présence d'un corps froid, le corps froid s'échauffe et le corps chaud se refroidit; généralisant cette observation, nous admettons comme exacte la loi suivante :

Pour qu'un système isolé (1) *soit en équilibre, il est nécessaire que toutes les parties matérielles qui composent ce système soient également chaudes.*

Cette loi nous amène à corriger de nouveau les données de nos sensations. L'expérience nous apprend, en effet, que, dans certains systèmes que nous regardons comme étant en équilibre, diverses parties peuvent nous paraître très inégalement chaudes; par exemple, un morceau d'acier et un morceau de bois, dont l'ensemble est en équi-

(1) Il faut bien remarquer que cette loi n'est exacte qu'autant que le système auquel on l'applique est *isolé*. Une barre métallique dont une extrémité plonge dans la vapeur d'eau bouillante, et l'autre dans la glace fondante est en équilibre lorsque le régime permanent des flux de chaleur est établi. Cependant les divers points de cette barre sont inégalement échauffés. Mais cette barre ne forme pas un système isolé. Si l'on voulait l'incorporer dans un système isolé, celui-ci contiendrait, en même temps qu'elle, l'eau bouillante et la glace fondante, qui ne sont pas en équilibre. Une observation analogue s'appliquerait à l'état d'équilibre auquel parvient une chaîne thermo-électrique lorsque le régime permanent est établi, tant pour les flux de chaleur que pour les flux électriques.

libre, nous font éprouver des sensations de chaleur très inégales; nous continuons cependant à les regarder comme étant également chauds en réalité; et nous admettons que nos sensations ne nous renseignent pas toujours exactement sur le degré de chaleur des corps.

Ces mots *être chaud* correspondent donc à une propriété de chacune des parties infiniment petites en lesquelles les corps peuvent être censés divisés. Qu'est en soi cette propriété? Est-elle réductible, par sa nature même, en éléments quantitatifs? Ce sont des questions que la Physique n'a pas à résoudre. *Telle que nous la concevons,* cette propriété n'est pas quantitative. Elle nous apparaît comme susceptible d'être reproduite identique à elle-même, d'être augmentée ou diminuée, *mais non comme susceptible d'addition.*

Mais à cette propriété non quantitative nous pouvons faire correspondre une grandeur algébrique qui, *sans avoir avec elle aucune relation de nature,* en sera la représentation.

Nous pouvons, en effet, concevoir l'existence d'une grandeur qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° En chaque point d'un corps quelconque, cette grandeur a une valeur déterminée;

2° En deux points également chauds, elle a la même valeur;

3° En deux points inégalement chauds, elle a des valeurs différentes, la plus grande valeur correspondant au point le plus chaud;

4° Si deux points tendent à devenir également chauds, les valeurs de la grandeur considérée qui leur correspondent tendent vers une même limite.

On voit que, si l'on connaissait les valeurs prises par une semblable grandeur aux divers points d'un ensemble de corps, on saurait toujours exactement si le degré de chaleur varie d'une partie à l'autre de cet ensemble, et dans quel sens il varie.

Cette grandeur, dont les diverses valeurs servent, non pas à *mesurer* (ce qui, d'après ce qui précède, n'aurait aucun sens), mais à *repérer* les divers degrés de chaleur, sera nommée *température.*

La définition de la température laisse arbitraire, à un haut degré, le choix de cette grandeur. Imaginons, en effet, que l'on ait, d'une première manière, déterminé la température en tout point; soit $\mathfrak{S}$ cette température; la grandeur $\Theta = f(\mathfrak{S})$ pourra évidemment être, à son

tour, prise comme température, si la fonction $f(\mathfrak{z})$ possède les trois caractères suivants :

1° Pour chacune des valeurs que la variable $\mathfrak{z}$ est susceptible de prendre, la fonction $f(\mathfrak{z})$ prend une valeur et une seule;

2° La fonction $f(\mathfrak{z})$ varie d'une manière continue lorsque $\mathfrak{z}$ varie d'une manière continue;

3° La fonction $f(\mathfrak{z})$ varie toujours dans le même sens que $\mathfrak{z}$.

L'opération par laquelle on connaîtrait, à un instant donné, comment les diverses parties des corps devraient être classées si l'on voulait que toutes les parties d'une même classe fussent également chaudes; que les parties qui sont rangées dans une classe quelconque fussent plus chaudes que les parties rangées dans la classe précédente et moins chaudes que les parties rangées dans la classe suivante; cette opération, dis-je, nous apparaît comme logiquement possible, bien que nos sens ne nous permettent pas de la réaliser, si ce n'est entre des limites restreintes et d'une manière grossièrement approchée.

Nous concevons donc qu'une température, constante pour toutes les parties qui se trouvent dans la même classe et croissante d'une classe à l'autre, puisse être choisie, bien que nos sensations ne nous fournissent pas le moyen de réaliser un semblable choix avec quelque précision. Cela suffit pour que nous puissions faire figurer cette température dans nos raisonnements sans risquer d'employer un mot vide de sens. De fait, c'est exclusivement de cette température, conçue d'une manière abstraite, qu'il sera question dans nos théories.

Mais si nous voulons appliquer à des systèmes concrets les résultats auxquels nous auront conduits les raisonnements abstraits où figure la température, il ne nous suffira plus de savoir qu'il est possible de constituer une grandeur, appelée *température*, prenant une valeur déterminée en chaque point de ces systèmes; il faudra encore avoir un moyen, exact ou approché, de construire réellement une semblable grandeur, d'en obtenir la valeur numérique, c'est-à-dire de classer les parties des corps selon leur degré croissant de chaleur; nous avons vu que nos sens, employés directement, étaient insuffisants pour cet objet.

La méthode employée pour obtenir une détermination expérimentale de la température, ou plutôt d'*une* température, ne s'applique

qu'à un cas particulier, très étendu il est vrai; par des hypothèses spéciales, que nous n'examinerons pas ici, on parvient à l'étendre à certains autres cas.

Cette détermination expérimentale repose sur la loi suivante, dont nous avons dit l'origine :

Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire que toutes ses parties soient également chaudes.

Si, comme nous en avons le droit, nous faisons figurer dans nos raisonnements une température ϑ dont la détermination est conçue d'une manière abstraite, mais non réalisée d'une manière effective, nous pourrons énoncer la loi précédente sous cette forme :

Si un système isolé est en équilibre, la température ϑ a la même valeur en tous ses points.

Cette loi admise, supposons que nous ayons un système S, isolé et en équilibre; il a la même température en tous ses points.

Ce système S est lui-même formé de deux systèmes *indépendants* T et U.

Le système U, sauf la propriété d'être indépendant du système T, est quelconque.

On suppose au contraire que le système T possède, au moins approximativement les caractères (¹) suivants :

1° Pour une valeur donnée de la température ϑ, la même en tous ses points, le système T ne peut être en équilibre que d'une seule manière, quel que soit le système indépendant U auquel il est adjoint; les diverses propriétés que présente ce système T en équilibre dépendent donc uniquement de la température; si, parmi elles, il en est une qui est mesurable (par exemple, une propriété géométrique), le nombre qui la mesure est fonction de la seule température ϑ.

(¹) Ces caractères, des expériences plus ou moins grossières, celles, par exemple, que nous permet l'usage direct de nos sens, nous les ont fait apercevoir; puis, par voie d'hypothèse, nous avons admis que le système T les possédait soit rigoureusement, soit avec une approximation supérieure à celle de nos premières observations.

2° Parmi ces propriétés mesurables du système T, il en est au moins une qui va toujours en croissant lorsque le système T s'échauffe; de quelque manière que l'on suppose choisie la température $\mathfrak{S}$, le nombre Θ qui mesure cette propriété variera toujours dans le même sens que $\mathfrak{S}$.

D'après une remarque faite précédemment *le nombre* Θ *pourra être pris comme propre à marquer la température* du système T et, partant, du système U.

Donc, toutes les fois que l'on aura pu adjoindre au système T, choisi une fois pour toutes, un certain système U, indépendant du système T et formant avec lui un système isolé en équilibre, on saura, d'une manière effective, faire correspondre une valeur de la température au degré de chaleur que possède le système U dans ces conditions.

Lorsqu'on définit le système T et la propriété de ce système dont la mesure Θ donnera la valeur numérique de la température, on dit que l'on fait choix d'un *thermomètre*. Lorsqu'on indique la valeur numérique de la température d'un système U, on doit évidemment, pour que cette indication ait un sens, mentionner le thermomètre que l'on a choisi.

Nous laissons au lecteur le soin d'éclaircir les généralités qui précèdent en les appliquant aux divers thermomètres ordinairement employés.

CHAPITRE II.

LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

1. *L'œuvre et l'énergie d'un système.* — Nous pouvons, par nos efforts, produire dans un système une certaine transformation ou aider à cette transformation; nous pouvons déplacer un corps, le lancer avec une certaine vitesse, le briser, le déformer. Nous pouvons, au contraire, employer nos efforts à mettre obstacle à la transformation que subit un système, à gêner cette transformation; nous pouvons arrêter un corps en mouvement, le ralentir, l'empêcher de se déformer. Nous

disons alors que nous avons accompli un certain ouvrage, fait une certaine *œuvre*.

L'expérience de chaque jour nous apprend qu'à notre action personnelle nous pouvons substituer un corps ou un assemblage de corps capable de produire ou d'aider la modification que nous produisons ou que nous aidons, de gêner la modification que nous gênons. L'objet pratique de la Physique est précisément, dans un grand nombre de cas, de connaître quels sont les divers corps qui peuvent être substitués à notre activité personnelle pour favoriser ou pour entraver une certaine modification, quelles sont les machines qui peuvent remplacer les ouvriers dans l'accomplissement d'un certain ouvrage. L'œuvre que nous aurions accomplie si nous avions agi nous-même sur le système qui se transforme, nous la regardons comme accomplie par le corps ou l'ensemble de corps que nous avons substitué à nous-même ou à nos semblables.

Cette notion d'œuvre accomplie par les corps étrangers à un système pendant que ce système subit une certaine modification, nous la transportons même au cas où la modification subie par le système est d'une nature telle que notre action personnelle ne pourrait ni l'aider, ni l'entraver. L'œuvre accomplie par ces corps étrangers est censée représenter l'œuvre qu'accomplirait un opérateur constitué autrement que nous et capable d'apporter à la transformation du système l'aide ou l'entrave qu'apportent les corps étrangers.

Ainsi donc, quand un système se transforme en présence de corps étrangers, nous considérons ces corps étrangers comme contribuant à cette transformation soit en la causant, soit en l'aidant, soit en l'entravant : c'est cette contribution, dont la nature demeure pour nous obscure, que nous nommons l'*œuvre accomplie pendant une transformation d'un système par les corps étrangers à ce système*.

Sans chercher à pénétrer la nature de cette contribution, ce qui n'est point l'objet de la Physique, mais de la Métaphysique, nous allons nous efforcer de créer une expression mathématique propre à servir de symbole à cette contribution. Pour cela, nous déterminerons la forme d'une expression assujettie à certaines conventions; ces conventions, nous ne les établirons pas au hasard ; nous les choisirons de telle sorte qu'elles soient l'image des caractères les plus simples et les plus

saillants que présente la notion d'œuvre, ou, tout au moins, de telle sorte qu'elles s'accordent sans peine avec ces caractères.

Supposons qu'un système, soumis à l'action de certains corps étrangers, subisse une certaine transformation; supposons ensuite que le même système subisse la même transformation, les corps étrangers au système étant autres. L'œuvre accomplie dans le premier cas et dans le second cas par les corps étrangers au système est la même, bien que ces corps soient différents; ce caractère, que nous attribuons forcément à la notion d'œuvre, nous conduit à poser la convention suivante :

Première convention. — *La grandeur qui représente l'œuvre accomplie, durant une transformation d'un système, par les corps étrangers à ce système est déterminée lorsqu'on connaît la nature du système et la transformation qu'il subit; elle est indépendante des corps étrangers au système.*

Voici maintenant une deuxième convention qu'il est bien naturel d'admettre.

Deuxième convention. — *Supposons qu'un système subisse successivement diverses transformations* 1, 2, ..., n, *pendant lesquelles les corps étrangers au système accomplissent des œuvres représentées respectivement par les grandeurs algébriques* G_1, G_2, ..., G_n. *L'ensemble des transformations* 1, 2, ..., n *peut être considéré comme une transformation unique; l'œuvre accomplie par les corps étrangers au système durant cette transformation résultante sera représentée par la grandeur* $(G_1 + G_2 + \ldots + G_n)$.

Nous pouvons désormais, lorsque aucune confusion ne sera à craindre entre le symbole mathématique et la notion qu'il représente, donner le nom d'*œuvre accomplie* durant la transformation d'un système par les corps étrangers à ce système à la grandeur algébrique qui représente cette œuvre.

Imaginons qu'un système parte d'un certain état initial avec un certain mouvement initial; qu'une série de modifications lui fasse pren-

dre, au bout d'un certain temps, un état final identique à son état initial, un mouvement final identique à son mouvement initial. Nous regarderons l'œuvre que les corps extérieurs avaient accomplie durant une partie de cette transformation comme ayant été détruite par l'œuvre accomplie durant le reste de la transformation, en sorte que l'œuvre totale sera nulle; nous serons ainsi conduits à poser la convention suivante :

TROISIÈME CONVENTION. — *Lorsqu'un système parcourt un cycle fermé, l'œuvre accomplie, durant le parcours de ce cycle, par les corps étrangers au système est égale à 0.*

Cette convention nous indique, en premier lieu, que la grandeur qui représente l'œuvre accomplie n'aura pas, pour toute modification d'un système, le même signe. Les diverses modifications dont la succession constitue un cycle fermé devront correspondre à des œuvres les unes positives et les autres négatives, de telle sorte que la somme des œuvres positives soit exactement compensée par la somme des œuvres négatives.

Mais, en outre, cette convention fournit des renseignements beaucoup plus précis sur la forme de la grandeur G qui représente l'œuvre accomplie, durant une modification d'un système, par les corps étrangers au système.

Considérons deux états différents d'un même système. Dans l'un de ces états, que nous désignerons par le symbole 1, les variables qui définissent les propriétés du système ont pour valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$; les vitesses des diverses particules qui composent le système ont pour composantes u_1, v_1, w_1; u'_1, v'_1, w'_1; .... Dans l'autre de ces états, que nous désignerons par le symbole 2, les variables qui définissent les propriétés du système ont pour valeurs $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$; les vitesses des diverses particules qui composent le système ont pour composantes u_2, v_2, w_2; u'_2, v'_2, w'_2, ...

Imaginons un certain nombre de modifications distinctes M_1^2, $M_1'^2$, $M_1''^2$, ..., qui, toutes, font passer le système de l'état 1 à l'état 2, et soit M_2^1 une modification qui fait passer le système de l'état 2 à l'état 1.

Soient

$$G_1^2, \quad G_1'^2, \quad G_1''^2, \quad \ldots, \quad G_2^1$$

les œuvres accomplies par les corps étrangers au système durant les modifications

$$M_1^2, \quad M_1'^2, \quad M_1''^2, \quad \ldots, \quad M_2^1.$$

Les deux modifications M_1^2, M_2^1, imposées au système l'une après l'autre, lui font décrire un cycle fermé; il en est de même des deux modifications $M_1'^2$, M_2^1; ou encore deux modifications $M_1''^2$, M_2^1, ...

La convention précédente donne alors

$$G_1^2 + G_2^1 = 0,$$
$$G_1'^2 + G_2^1 = 0,$$
$$G_1''^2 + G_2^1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou bien

$$G_1^2 = G_1'^2 = G_1''^2 = \ldots$$

Le résultat qu'exprime cette égalité peut s'énoncer ainsi :

L'œuvre accomplie, durant une modification d'un système, par les corps étrangers à ce système dépend de l'état et du mouvement du système au début et à la fin de la modification, mais non des autres particularités qui caractérisent cette modification.

Conformément à cet énoncé, nous poserons désormais

$$G_1^2 = \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Nous allons mettre la fonction ψ sous une forme plus explicite.

Considérons le système que nous étudions dans un certain état, *déterminé une fois pour toutes,* que nous désignerons par l'indice o; dans cet état, α_0, β_0, ..., λ_0 sont les valeurs des variables qui définissent les propriétés du système; u_0, v_0, w_0; u_0', v_0', w_0', ... sont les composantes des vitesses dont sont animées les particules matérielles qui le composent.

Si le système passe de l'état o à l'état 1, les corps extérieurs accompliront une œuvre

$$G_0^1 = \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots).$$

Si le système passe de l'état 1 à l'état 2, les corps extérieurs accomplissent une œuvre

$$G_1^2 = \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Ces deux transformations, effectuées l'une après l'autre, constituent une transformation faisant passer le système de l'état 0 à l'état 2; durant une semblable transformation, les corps extérieurs effectuent une œuvre

$$G_0^2 = \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Mais, d'autre part, d'après la deuxième convention, l'œuvre accomplie par les corps extérieurs durant cette dernière transformation doit avoir pour valeur $(G_0^1 + G_1^2)$. On a donc

$$G_0^2 = G_0^1 + G_1^2,$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ &= \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots) \\ &\quad + \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Cette identité (1) va déterminer la forme de la fonction ψ.

L'état 0 étant déterminé une fois pour toutes, les quantités

$$\alpha_0, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad u_0, \quad v_0, \quad w_0, \quad u'_0, \quad v'_0, \quad w'_0, \quad \ldots$$

sont non pas des variables, mais des constantes; la quantité

$$\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v'_0, w_0, \ldots | \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)$$

est une fonction des seules variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad u, \quad v, \quad w, \quad u', \quad v', \quad w', \quad \ldots.$$

Nous pouvons donc poser

$$(2)\qquad \begin{cases} \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ \quad = \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \end{cases}$$

et l'égalité (1) nous donnera

$$(3)\qquad \begin{cases} \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots \mid \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ \quad = \mathcal{E}(\alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots). \end{cases}$$

L'œuvre accomplie, durant une modification quelconque d'un système, par les corps étrangers à ce système est égale à l'accroissement que subit, par l'effet de cette modification, une certaine grandeur qui est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on connaît l'état du système et son mouvement.

Cette grandeur, définie par l'égalité (2), porte le nom d'*énergie du système*.

Pour définir l'énergie du système, nous avons fait choix d'un certain état du système déterminé une fois pour toutes, que nous avons nommé l'état o. Mais ce choix était arbitraire. Nous aurions pu raisonner de même en choisissant une fois pour toutes un état ω, différent de l'état o. Si nous désignons par $\alpha_\omega, \beta_\omega, \ldots, \lambda_\omega$ les valeurs des variables qui déterminent les propriétés du système dans l'état ω; par u_ω, v_ω, w_ω, u'_ω, v'_ω, w'_ω les composantes des vitesses qui, dans cet état, animent les diverses parties du système, nous aurions obtenu une nouvelle détermination de l'énergie du système, définie par l'égalité

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ \quad = \varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots). \end{cases}$$

Évaluons la différence entre les valeurs correspondantes de ces deux déterminations de l'énergie.

Les égalités (2) et (2 *bis*) donnent

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ - \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots). \end{aligned}$$

Mais l'égalité (3) montre que l'on a

$$\begin{aligned}&\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ &\quad = -\,\psi(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ &\quad = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ &\qquad + \psi(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots),\end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ &\quad = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots).\end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité est une constante.

Donc *les valeurs que deux déterminations de l'énergie prennent pour un même état du système diffèrent par une constante;* ce qu'on peut encore énoncer en disant que *l'énergie est déterminée à une constante près.*

2. *La force vive et l'énergie interne.* — Toute transformation subie par un système se décompose en deux éléments. En premier lieu, un *changement d'état;* les variables qui définissent l'état du système passent des valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ aux valeurs $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$. En second lieu, un *changement de mouvement;* les composantes des vitesses qui animent les parties matérielles élémentaires du système passent des valeurs u_1, v_1, w_1, u'_1, v'_1, w'_1, ... aux valeurs u_2, v_2, w_2, u'_2, v'_2, w'_2, ... C'est sur la distinction de ces deux éléments de toute transformation qu'est fondée la convention suivante, d'un caractère plus arbitraire que les précédentes :

Quatrième convention. — *L'œuvre accomplie pendant une transformation d'un système par les corps étrangers au système est la somme de deux termes : l'un dépend du changement d'état du sys-*

tème et ne dépend pas de son mouvement; l'autre dépend du changement du mouvement du système et ne dépend pas de son état.

Cette convention s'exprime par l'identité

$$(4)\quad \begin{cases} \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots \mid \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ \quad = \varphi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1 \mid \alpha_2, \ldots, \lambda_2) + \chi(u_1, v_1, w_1, \ldots \mid u_2, v_2, w_2, \ldots). \end{cases}$$

En vertu de cette égalité (4), l'égalité (2) devient

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = \varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda) \\ \qquad\qquad + \chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots). \end{cases}$$

Les quantités $\alpha_0, \ldots, \lambda_0$ sont choisies une fois pour toutes; la quantité

$$\varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda)$$

est donc une fonction des seules variables $\alpha, \ldots, \lambda$; nous pouvons poser

$$(6)\qquad \varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda) = \mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda).$$

De même, les quantités u_0, v_0, w_0, ... sont choisies une fois pour toutes; la quantité

$$\chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots)$$

est donc une fonction des seules variables $u, v, w, \ldots$; nous pouvons poser

$$(7)\qquad \chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots) = \mathrm{K}(u, v, w, \ldots).$$

En vertu des égalités (6) et (7), l'égalité (5) devient

$$(8)\quad \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = \mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \mathrm{K}(u, v, w, \ldots).$$

L'énergie d'un système est la somme de deux termes : l'un dépend uniquement de l'état du système et point de son mouvement;

l'autre, indépendant de l'état du système, est connu lorsqu'on connaît la vitesse qui anime chacune des parties élémentaires du système.

Le premier terme se nomme l'*énergie potentielle* ou l'*énergie interne;* le second se nomme l'*énergie actuelle* ou l'*énergie cinétique;* nous allons chercher à déterminer la forme de cette dernière.

Nous remarquerons, en premier lieu, que les vitesses désignées par $u_0, v_0, w_0, \ldots$ ont été choisies arbitrairement; désormais nous conviendrons de prendre

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 0, \qquad w_0 = 0, \qquad \ldots.$$

Or, d'après l'égalité (7), la fonction $K(u, v, w, \ldots)$ est égale à 0 si l'on a

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0, \qquad \ldots.$$

Par conséquent, nous serons assuré désormais que *la fonction*

$$K(u, v, w, \ldots)$$

est égale à 0 *lorsque l'on a*

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad \ldots.$$

Nous nous fonderons en second lieu sur une convention que l'on peut regarder comme inévitable, et que nous énoncerons ainsi :

Cinquième convention. — *Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes les unes des autres et infiniment éloignées les unes des autres, l'œuvre accomplie pendant une modification quelconque du système par les corps étrangers à ce système est la somme des œuvres accomplies pendant la modification correspondante de chacune des parties par les corps étrangers à ces parties.*

De cet énoncé, on déduit sans peine les conséquences suivantes :

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes

les unes des autres et infiniment éloignées les unes des autres, l'énergie interne du système est la somme des énergies internes des parties isolées; l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des parties isolées.

L'énergie cinétique ne dépendant pas de l'état du système, nous pouvons, pour déterminer la forme de cette énergie, décomposer par la pensée le système en parties matérielles infiniment petites, isoler ces parties matérielles les unes des autres, et les disperser dans l'espace de façon qu'elles soient infiniment éloignées. Cette opération altère l'état du système; mais elle ne change pas son énergie cinétique, si l'on a soin de conserver à chaque particule matérielle, après cette opération, la vitesse dont elle était animée avant cette opération.

Mais, après cette opération, l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des diverses parties qui le composent; nous sommes donc ramenés à déterminer la forme de l'énergie cinétique d'une partie matérielle infiniment petite.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse d'une partie matérielle infiniment petite. L'énergie cinétique sera une fonction de u, v, w, $k(u, v, w)$; la forme de la fonction k dépend de la nature de la particule matérielle, mais non de son état; pour une particule donnée, la forme de cette fonction est invariable; c'est cette forme que nous voulons connaître.

Sixième convention. — *Les corps étrangers à un système infiniment petit accomplissent toujours la même œuvre lorsque, à partir du repos, ils lui communiquent une vitesse de même grandeur, quelle que soit, dans l'espace, la direction de cette vitesse.*

Cette convention, qui revient à dire que, dans l'espace absolu, toutes les directions sont équivalentes, peut être regardée comme logiquement nécessaire; elle entraîne immédiatement cette conséquence : *La fonction $k(u, v, w)$ ne dépend pas isolément des trois composantes u, v, w de la vitesse* V, *mais seulement de la grandeur de cette dernière vitesse;* nous pouvons remplacer le symbole $k(u, v, w)$ par le symbole $k(\mathrm{V})$.

SEPTIÈME CONVENTION. — *L'œuvre accomplie par les corps extérieurs pour communiquer une certaine vitesse à une particule primitivement au repos est toujours une œuvre de même signe.*

Nous conviendrons de compter *positivement* une telle œuvre. La fonction $k(V)$ sera alors essentiellement positive.

HUITIÈME CONVENTION. — *Soient deux particules matérielles* P, P'. *Si les corps étrangers à ces deux particules effectuent la même œuvre pour communiquer à toutes deux une certaine vitese* V_0, *ils effectueront aussi la même œuvre pour communiquer à toutes deux la même vitesse* V, *quelle que soit cette dernière.*

En d'autres termes, l'égalité

$$k(V) = k'(V)$$

ne peut avoir lieu pour une certaine valeur V_0 de V sans avoir lieu identiquement.

Cette convention posée, considérons une particule à laquelle correspond une certaine fonction $k(V)$. Divisons-la elle-même en parties plus petites. Ces parties auront respectivement pour énergie cinétique $x(V)$, $x'(V)$, ... Nous savons que l'énergie cinétique $k(V)$ de la première partie aura pour valeur

$$k(V) = x(V) + x'(V) + \ldots. \tag{9}$$

D'ailleurs chacune des quantités $x(V)$, $x'(V)$, ... est positive; chacune d'elles est donc inférieure à $k(V)$. Ainsi, *si un élément matériel est une partie d'un autre élément matériel, pour une même vitesse il a une moindre énergie cinétique.* D'ailleurs, il est évident que l'*énergie cinétique d'un élément matériel pour une vitesse donnée varie d'une manière continue si l'on fait croître ou décroître d'une manière continue la quantité de matière que renferme cet élément.* En s'appuyant sur ces deux propositions, on démontre sans peine la proposition suivante : *Étant donnée une particule matérielle* P, *on peut toujours, quel que soit l'entier* N, *la diviser en* N

particules qui, pour une valeur donnée, aient même énergie cinétique. La convention précédente montre que *ces* N *particules auront toujours même énergie cinétique si on les anime toutes d'une même vitesse, quelle que soit d'ailleurs cette vitesse.* Si, à cette proposition, on joint l'égalité (9), on voit sans peine que, *pour une même vitesse, l'énergie cinétique de chacune de ces particules est la* N^{ième} *partie de l'énergie cinétique de la particule* P.

Prenons deux éléments matériels quelconques P et P', dont les énergies cinétiques sont représentées par les fonctions $k(V)$ et $k'(V)$. Soit V_0 une valeur particulière de V. Considérons le rapport $\frac{k'(V_0)}{k(V_0)}$ et supposons tout d'abord ce rapport commensurable.

Posons

$$\frac{k'(V_0)}{k(V_0)} = \frac{N'}{N},$$

N et N' étant deux nombres entiers premiers entre eux.

Divisons la particule P en N éléments ϖ, ... ayant, pour une même vitesse, des énergies cinétiques $x(V)$, ... égales entre elles et égales à $\frac{k(V)}{N}$.

Divisons la particule P' en N' éléments ϖ', ... ayant, pour une même vitesse, des énergies cinétiques $x(V)$, ... égales entre elles et égales à $\frac{k'(V_0)}{N'}$.

Nous aurons

$$x(V_0) = \frac{k(V_0)}{N}, \qquad x'(V_0) = \frac{k'(V_0)}{N'},$$

et, par conséquent,

$$x(V_0) = x'(V_0).$$

Dès lors, d'après la convention précédente, on a, quel que soit V,

$$x(V) = x'(V),$$

en sorte que les égalités

$$k(V) = N x(V), \qquad k'(V) = N' x'(V)$$

donnent

$$\frac{k(V)}{k'(V)} = \frac{N}{N'} = \frac{k(V_0)}{k'(V_0)}.$$

Les énergies cinétiques qui, pour deux éléments matériels différents, correspondent à une même vitesse, sont entre elles dans un rapport indépendant de cette vitesse.

Nous venons de démontrer cette proposition pour le cas où le rapport $\frac{k'(V_0)}{k(V_0)}$ est commensurable. Mais elle est évidemment générale; car si le rapport $\frac{k'(V)}{k(V)}$ était variable avec V, il serait une fonction continue de V. Donc, pour certaines valeurs de V, il passerait par des valeurs commensurables; le raisonnement précédent montrerait alors que l'hypothèse où $\frac{k'(V)}{k(V)}$ varie avec V est absurde.

Considérons deux corps d'étendue finie quelconque, C et C', et supposons tous les points de ces deux corps animés d'une certaine vitesse V. Soient K(V) et K'(V) leurs énergies cinétiques. Chacune de ces énergies cinétiques est la somme des énergies qu'auraient, pour la même vitesse, les divers éléments matériels en lesquels chacun des deux corps peut être censé divisé. Dès lors, il n'est pas malaisé de déduire de la proposition précédente que *le rapport* $\frac{K'(V)}{K(V)}$ *est indépendant de la vitesse* V; *il dépend uniquement de la nature des deux corps* C *et* C'.

Prenons un corps déterminé Γ, par exemple le kilogramme des Archives. Supposons que tous les points de ce corps soient animés d'une même vitesse V. Soit $\chi(V)$ l'énergie cinétique de ce corps dans ces circonstances.

Soit ensuite un autre corps C quelconque, fini ou infiniment petit. Supposons que tous les points de ce corps soient animés de la même vitesse V.

Soit K(V) l'énergie cinétique du corps C dans ces conditions. Posons

$$K(V) = M\chi(V). \tag{10}$$

Au sujet du nombre M, que définit cette égalité (10), nous pouvons immédiatement affirmer les propositions suivantes :

1° *Le nombre* M *ne dépend pas de la vitesse* V; *il dépend uniquement de la nature des corps* Γ *et* C;
2° *Le nombre* M *est essentiellement positif;*
3° *Le nombre* M *relatif à un élément matériel infiniment petit est infiniment petit comme cet élément;*
4° *Le nombre* M *relatif à un ensemble de corps est égal à la somme des nombres analogues relatifs aux divers corps qui composent cet ensemble;*
5° *Pour le corps* Γ, *le nombre* M *est égal à* 1.

Le nombre M se nomme la *masse* du corps C. On dit que le corps Γ constitue la *masse étalon* ou l'*unité de masse*.

On voit que la masse d'un corps est proportionnelle à l'œuvre que doivent effectuer les corps étrangers à celui-là pour le faire passer du repos à un état de mouvement où tous ses points sont animés d'une même vitesse donnée.

Considérons un système quelconque, dont les diverses parties élémentaires P, P′, P″, ... sont animées de vitesses quelconques V, V′, V″, ... L'énergie cinétique de ce système est la somme des énergies cinétiques de ses diverses parties. Or, si l'on désigne par m, m', m'', ... les masses des éléments P, P′, P″, ..., ces énergies cinétiques partielles auront respectivement pour valeurs, d'après l'égalité (10),

$$m\chi(V), \qquad m'\chi(V'), \qquad m''\chi(V''), \qquad \ldots.$$

L'énergie cinétique du système a donc pour valeur

$$(11) \quad K = m\chi(V) + m'\chi(V') + m''\chi(V'') + \ldots = \sum m\chi(V).$$

La forme de cette énergie cinétique nous sera donc entièrement connue si nous déterminons la forme de la fonction $\chi(V)$. Pour effectuer cette détermination, nous nous appuierons sur une nouvelle convention.

NEUVIÈME CONVENTION. — *Pour imprimer à tous les points d'un élément matériel une certaine vitesse dans une direction* D, *les corps extérieurs doivent accomplir la même œuvre, soit que l'élément matériel parte du repos, soit qu'il soit primitivement animé d'une vitesse quelconque dans une direction* D′, *normale à* D.

Admettons cette convention qui, bien que se présentant assez naturellement à l'esprit, n'a nullement le caractère de la nécessité logique.

Soit V une vitesse; soient u, v, w ses composantes suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, Oz. Supposons ces trois composantes positives. Prenons un élément matériel de masse m et donnons-lui une vitesse u dans la direction Ox. Nous effectuerons une œuvre ayant pour grandeur

$$g_1 = m\chi(u).$$

L'élément étant déjà animé de cette vitesse u dans la direction Ox, lançons-le, en outre, avec la vitesse v dans la direction Oy. D'après la convention précédente, l'œuvre accomplie dans cette seconde modification est la même que si nous communiquions la vitesse v, dans la direction Oy, au mobile partant du repos; elle a donc pour grandeur

$$g_2 = m\chi(v).$$

A l'élément déjà animé des deux vitesses u suivant Ox et v suivant Oy, appliquons une œuvre capable de lui communiquer une vitesse w suivant Oz; cette œuvre, égale, d'après la convention précédente, à celle qui communiquerait une vitesse w suivant Oz au mobile partant du repos, a pour valeur

$$g_3 = m\chi(w).$$

L'ensemble de ces trois modifications prend le mobile au repos et l'anime de la vitesse V. L'œuvre accomplie dans l'ensemble de ces trois modifications, œuvre qui a pour valeur $(g_1 + g_2 + g_3)$, doit être égale à $m\chi(V)$.

On doit donc avoir identiquement

$$\chi(V) = \chi(u) + \chi(v) + \chi(w).$$

En différentiant cette identité par rapport à u, et en tenant compte de l'égalité

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2,$$

nous trouvons

$$\frac{\frac{d\chi(u)}{du}}{\frac{d\chi(V)}{dV}} = \frac{u}{V}.$$

Les valeurs de u et de V sont quelconques. On voit donc que $\frac{d\chi(V)}{dV}$ doit être proportionnel à V. Si l'on observe en outre que $\chi(V)$ doit s'annuler avec V, on arrive à cette conclusion :

La fonction $\chi(V)$ est proportionnelle à V^2.

Nous poserons

(12) $$\chi(V) = \frac{V^2}{2E},$$

E étant une quantité *essentiellement positive* et indépendante de V.

Dès lors, d'après l'égalité (11), l'énergie cinétique d'un système quelconque est donnée par la formule

(13) $$K = \frac{1}{E} \sum \frac{mV^2}{2}.$$

La quantité

(14) $$\mathfrak{T} = \sum \frac{mV^2}{2}$$

se nomme la *force vive du système.*

La constante E se nomme l'*équivalent mécanique de la chaleur;* nous verrons plus tard la raison de cette dénomination. La valeur de

cette constante dépend des unités de longueur, de temps, de masse et d'œuvre. L'égalité (12) montre en effet que, si l'on prend la masse étalon Γ au repos et si on la lance avec une vitesse qui lui fasse parcourir l'unité de longueur pendant l'unité de temps, l'œuvre effectuée devra être numériquement égale à $\frac{1}{2E}$.

D'après les égalités (8), (13) et (14), l'énergie d'un système quelconque est donnée par la formule

$$(15) \qquad \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \frac{\mathfrak{T}}{E}.$$

Relativement à l'énergie interne $U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, il nous reste une dernière convention à poser.

Dixième convention ([1]). — *La valeur de l'énergie interne d'un système ne change pas lorsqu'on change seulement sa position absolue dans l'espace, sans changer aucune des autres propriétés de ce système.*

Ainsi, parmi les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, celles-là ne figurent pas dans l'expression de $U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ qui servent seulement à fixer la position absolue du système dans l'espace.

5. *Le principe de la conservation de l'énergie.* — Les conventions que nous avons énumérées dans ce qui précède nous ont amené à définir la forme d'une certaine quantité algébrique propre à servir de symbole à la notion d'œuvre effectuée, pendant une transformation d'un système, par les corps étrangers à ce système. Cette quantité algébrique est égale à l'accroissement que la transformation considérée fait subir à l'énergie totale du système.

Mais, dans le cas où aucun corps étranger au système n'agit sur le système, l'œuvre accomplie par les corps étrangers durant une modi-

([1]) Cette convention pourrait sembler *évidente* à quelques esprits; si, toutefois, on observe que l'énergie interne d'un système dépend du mouvement *absolu* de ce système, on voit qu'il ne serait nullement *absurde* de la regarder comme dépendant aussi des sa position *absolue* dans l'espace.

fication quelconque du système doit évidemment être égale à o. Nous sommes donc amené à énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système matériel, isolé dans l'espace, éprouve une transformation quelconque, l'énergie totale de ce système demeure invariable par l'effet de cette transformation.

Cette proposition, qu'exprime l'égalité

$$(16) \qquad U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \frac{\mathfrak{T}}{E} = \text{const.},$$

constitue le *principe de la conservation de l'énergie.*

Elle se distingue de toutes celles que nous avons énoncées dans ce qui précède. Celles-ci, en effet, avaient un caractère arbitraire; en dernière analyse, nous sommes absolument libres de considérer la quantité

$$\begin{aligned} G = \quad & U(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2) + \frac{\mathfrak{T}_2}{E}, \\ & - U(\alpha_1, \beta_3, \ldots, \lambda_1) + \frac{\mathfrak{T}_1}{E} \end{aligned}$$

et de lui donner tel nom qu'il nous plaira, par exemple le nom d'*œuvre* accomplie par les corps étrangers au système. Mais, lorsque nous énonçons que, dans toute transformation d'un système isolé, il existe une quantité de la forme

$$U(\alpha, \beta, \ldots \lambda) + \frac{\mathfrak{T}}{E},$$

qui demeure invariable, nous énonçons une proposition dont les conséquences peuvent être ou conformes ou contraires à l'expérience : une proposition que nous ne pouvons pas admettre ou rejeter à notre fantaisie; en un mot, une *hypothèse physique,* la première que nous ayons rencontrée jusqu'ici. Les considérations exposées aux n^os **1** et **2** ont pour but d'introduire cette hypothèse, de nous conduire à la formuler; elles ne la démontrent pas. C'est à l'expérience d'en vérifier les conséquences plus ou moins éloignées.

CHAPITRE III.

LE TRAVAIL ET LA QUANTITÉ DE CHALEUR.

1. *Établissement d'une équation fondamentale.* — Considérons un système Σ, isolé dans l'espace, et susceptible d'être lui-même subdivisé en deux systèmes indépendants, S et S'.

Soient α, β, ..., λ, a, b, ..., l les variables qui déterminent la position du système S, isolé dans l'espace et son état; α, β, ..., λ sont celles de ces variables qui figurent dans les équations (1) du Chapitre I relatives au système S; a, b, ..., l sont celles qui n'y figurent pas.

Soient, de même, α', β', ..., λ', a', b', ..., l' les variables qui déterminent la position du système S', isolé dans l'espace, et son état.

Si le système S était isolé dans l'espace, son énergie interne serait une certaine fonction de α, β, ..., λ, a, b, ..., l, que nous désignerons par

$$\mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l).$$

Sa force vive serait une forme quadratique des variables

$$u = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad v = \frac{d\beta}{dt}, \qquad \ldots, \qquad w = \frac{d\lambda}{dt};$$

elle dépendrait en outre d'une manière quelconque des variables α, β, ..., λ, mais point des variables a, b, ..., l. Soit $\mathfrak{T}$ cette force vive.

Si le système S' était isolé dans l'espace, son énergie interne serait une certaine fonction de α', β', ..., λ', a', b', ..., l', que nous désignerons par

$$\mathrm{U}'(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', a', b', \ldots, l').$$

Sa force vive serait une forme quadratique des variables

$$u' = \frac{d\alpha'}{dt}, \qquad v' = \frac{d\beta'}{dt}, \qquad \ldots, \qquad w' = \frac{d\lambda'}{dt};$$

elle dépendrait en outre d'une manière quelconque des variables α', β', ..., λ', mais point des variables α', β', ..., l'. Soit $\mathfrak{T}'$ cette force vive.

Considérons le système Σ.

Si l'on connaît les variables

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,$$
$$\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l',$$

on connaît la position et l'état de chacun des deux systèmes S et S' qui le composent; on connaît donc l'état du système Σ. L'énergie interne du système Σ sera une fonction de ces variables. Désignons-la par

$$\Upsilon(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,\ \alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l').$$

Nous pourrons évidemment écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Upsilon = {} & \mathrm{U}(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l) \\ & + \mathrm{U}'(\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l') \\ & + \Psi(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,\ \alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l'). \end{aligned}\right.$$

Quant à la force vive du système Σ, elle est évidemment égale à $(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}')$.

L'énergie totale du système Σ aura pour valeur

$$(2)\qquad \mathcal{E} = \Upsilon + \frac{1}{\mathrm{E}}(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}').$$

Écrivons que la modification infiniment petite éprouvée par le système Σ, pendant le temps dt, laisse invariable la valeur de cette énergie $\mathcal{E}$.

Posons

$$\varphi = \frac{da}{dt},\qquad \chi = \frac{db}{dt},\qquad \ldots,\qquad \psi = \frac{dl}{dt},$$
$$\varphi' = \frac{da'}{dt},\qquad \chi' = \frac{db'}{dt},\qquad \ldots,\qquad \psi' = \frac{dl'}{dt}.$$

D'après l'égalité (1), pendant le temps dt, Υ éprouvera une variation

$$\begin{aligned}\delta\Upsilon = \Big[& \left(\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right) u + \left(\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right) v + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right) w \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial\Psi}{\partial a}\right) \varphi + \left(\frac{\partial U}{\partial b} + \frac{\partial\Psi}{\partial b}\right) \chi + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial l} + \frac{\partial\Psi}{\partial l}\right) \psi \\ & + \left(\frac{\partial U'}{\partial\alpha'} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha'}\right) u' + \left(\frac{\partial U'}{\partial\beta'} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta'}\right) v' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial\lambda'} + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda'}\right) w' \\ & + \left(\frac{\partial U'}{\partial a'} + \frac{\partial\Psi}{\partial a'}\right) \varphi' + \left(\frac{\partial U'}{\partial b'} + \frac{\partial\Psi}{\partial b'}\right) \chi' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial l'} + \frac{\partial\Psi}{\partial l'}\right) \psi' \Big] dt.\end{aligned}$$

Quant à la variation subie par la force vive pendant le même temps, un calcul connu permet de la mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\delta(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}') = -\Big[& \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u}\right) u \\ & + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial v}\right) v + \ldots + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w}\right) w \\ & + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial u'}\right) u' \\ & + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\beta'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial v'}\right) v' + \ldots + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial w'}\right) w' \Big] dt.\end{aligned}$$

Si nous exprimons que l'énergie totale $\mathcal{E}$, donnée par l'égalité (2), est demeurée invariable, nous trouvons l'égalité suivante

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & \left[\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u}\right)\right] u \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w}\right)\right] w \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial\Psi}{\partial a}\right)\varphi + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial l} + \frac{\partial\Psi}{\partial l}\right)\psi \\ & + \left[\frac{\partial U'}{\partial\alpha'} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha'} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial u'}\right)\right] u' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\frac{\partial U'}{\partial\lambda'} + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda'} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial\lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}'}{\partial w'}\right)\right] w' \\ & + \left(\frac{\partial U'}{\partial a'} + \frac{\partial\Psi}{\partial a'}\right)\varphi' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial l'} + \frac{\partial\Psi}{\partial l'}\right)\psi' = 0.\end{aligned}\right.$$

Cette égalité fondamentale va nous servir de point de départ pour les considérations qui feront l'objet du présent Chapitre.

2. *Du travail.* — Posons

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = -A, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a} = -\mathcal{A}, \\
E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta} = -B, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial b} = -\mathcal{B}, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\
E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = -L, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l} = -\mathcal{L}.
\end{array}
\right.
$$

Nous dirons que les quantités $A, B, \dots, L$ représentent les *forces* exercées par le système S′ sur le système S; que les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}, \dots, \mathcal{L}$ représentent les *influences* exercées par le système S′ sur le système S. L'ensemble des forces et des influences exercées par le système S′ sur le système S se nommera l'ensemble des *actions* du système S′ sur le système S.

La quantité

$$(Au + Bv + \dots + Lw)\,dt$$

est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *forces* que le système S′ exerce sur le système S; la quantité

$$(\mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}\chi + \dots + \mathcal{L}\psi)\,dt$$

est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *influences* que le système S′ exerce sur le système S. La somme des deux quantités précédentes est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *actions* du système S′ sur le système S.

Considérons une modification virtuelle du système S; soient

$$\delta\alpha,\quad \delta\beta,\quad \dots,\quad \delta\lambda,\quad \delta a,\quad \delta b,\quad \dots,\quad \delta l$$

les variations que cette modification fait éprouver aux variables

$$\alpha,\quad \beta,\quad \dots,\quad \lambda,\quad a,\quad b,\quad \dots,\quad l.$$

Les expressions

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda,$$
$$\mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta\lambda,$$
$$A\,\delta\alpha + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l$$

seront nommées respectivement :

Travail virtuel des forces exercées par le système S′ sur le système S;

Travail virtuel des influences exercées par le système S′ sur le système S;

Travail virtuel des actions exercées par le système S′ sur le système S.

Le travail (réel ou virtuel) des actions du système S′ sur le système S a pour valeur, d'après les égalités (4),

$$-\,E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial\Psi}{\partial a}\,\delta a + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial l}\,\delta l\right).$$

Ce n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, qui déterminent le système S. Pour transformer cette expression en une différentielle totale, il faudrait lui ajouter le terme

$$-\,E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha'}\,\delta\alpha' + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda'}\,\delta\lambda' + \frac{\partial\Psi}{\partial a'}\,\delta a' + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial l'}\,\delta l'\right),$$

c'est-à-dire le travail des actions du système S sur le système S′.

Ainsi le travail des actions du système S′ sur le système S n'est pas, en général, une différentielle totale, mais *le travail des actions mutuelles des deux systèmes* S *et* S′ *est toujours la différentielle totale d'une fonction qui est définie d'une manière uniforme lorsqu'on connaît l'état du système* Σ *constitué par l'ensemble de deux systèmes* S *et* S′.

La fonction $E\Psi$, dont la différentielle totale, changée de signe,

donne le travail des actions mutuelles des deux systèmes S et S′, se nomme le *potentiel* de ces actions.

Comme la fonction Υ, ce potentiel dépend des propriétés des deux systèmes S et S′ et de leur position relative, *mais point de la situation absolue que le système* Σ *occupe dans l'espace;* il en est de même des actions mutuelles des deux systèmes S et S′.

Ce théorème peut se généraliser et s'étendre à un système Σ formé de n systèmes indépendants $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Pour ne pas compliquer les notations, sans avantage sérieux au point de vue de la généralité, nous supposerons le système Σ formé seulement de trois systèmes partiels S_1, S_2, S_3.

Soient

$$\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1,$$
$$\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2,$$
$$\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3$$

les trois systèmes de variables qui définissent respectivement l'état de chacun des trois systèmes S_1, S_2, S_3.

Soient

$$U_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1),$$
$$U_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2),$$
$$U_3(\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3)$$

les énergies internes de ces systèmes considérés isolément.

L'énergie interne du système Σ pourra évidemment être mise sous la forme suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} \Upsilon = U_1 + U_2 + U_3 + \Psi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ \qquad\qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ \qquad\qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{cases}$$

Pour former la fonction Ψ, nous pouvons opérer de la manière suivante : nous envisageons d'abord le système Σ_{23} formé par l'ensemble des deux systèmes S_2 et S_3 ; l'énergie interne de ce système sera de la

forme

$$(6)\quad \begin{cases} \Upsilon_{23} = U_2 + U_3 \\ \qquad + \Psi_{23}(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{cases}$$

Combinons ensuite ce système Σ_{23} avec le système S_1, de manière à former le système Σ. L'énergie interne de ce système sera de la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \Upsilon = U_1 + \Upsilon_{23} + X_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ \qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ \qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{cases}$$

La comparaison des formules (5), (6) et (7) donne l'égalité

$$(8)\quad \begin{cases} \Psi = \Psi_{23}(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3) \\ \qquad + X_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ \qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ \qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{cases}$$

Les définitions posées dans ce qui précède nous montrent que les actions exercées sur le système S_1 par le système Σ_{23}, c'est-à-dire par l'ensemble des systèmes S_2, S_3, sont déterminées par les égalités

$$(4\,bis)\quad \begin{cases} A_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial \alpha_1}, & \mathcal{A}_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial \lambda_1}, & \mathcal{L}_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial l_1}, \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire, en vertu de l'égalité (8),

$$(4\,ter)\quad \begin{cases} A_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1}, & \mathcal{A}_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1}, & \mathcal{L}_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial l_1}. \end{cases}$$

Les actions que le système S_2 subit de la part de l'ensemble des systèmes S_3 et S_1; les actions que le système S_3 subit de la part de l'en-

semble des systèmes S_1 et S_2 sont déterminées d'une manière analogue. On déduit aisément de là la proposition suivante :

Dans un système complexe, formé de plusieurs systèmes indépendants, chacun de ces derniers subit certaines actions de la part de l'ensemble des autres; toutes ces actions, prises ensemble, admettent un potentiel.

Ce potentiel $E\Psi$ *dépend des propriétés des divers systèmes indépendants qui composent le système complexe, et de leur position relative; il ne dépend pas de la position absolue que le système complexe occupe dans l'espace.*

Des démonstrations analogues à celle qui a fourni l'égalité (8) permettent d'écrire, en faisant usage de notations semblables, les égalités

$$(8\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi = {} & \Psi_{31}(\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1) \\ & + X_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ & \qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \\ & \qquad \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1); \\ \Psi = {} & \Psi_{12}(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, \omega_2, \ldots, l_2) \\ & + X_3(\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \\ & \qquad \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ & \qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2). \end{aligned}\right.$$

Ces égalités (8) et (8 *bis*) seront évidemment vérifiées si l'on pose

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \Psi_{31} + \Psi_{12}, \\ X_2 &= \Psi_{12} + \Psi_{23}, \\ X_3 &= \Psi_{23} + \Psi_{31}, \end{aligned}\right.$$

qui entraînent

$$\Psi = \Psi_{23} + \Psi_{31} + \Psi_{12},$$

mais elles n'entraînent pas nécessairement ces égalités (9).

Voyons à quelles conséquences conduiraient ces égalités (9).

Les actions que le système S_2 exercerait sur le système S_1, si ces

deux systèmes existaient seuls, seraient données par les égalités

$$\mathrm{A}_{12} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial\alpha_1}, \qquad \mathcal{A}_{12} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial a_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$
$$\mathrm{L}_{12} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial\lambda_1}, \qquad \mathcal{L}_{12} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial l_1}.$$

Les actions que le système S_3 exercerait sur le système S_1, si ces deux systèmes existaient seuls, seraient données par les égalités

$$\mathrm{A}_{13} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial\alpha_1}, \qquad \mathcal{A}_{13} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial a_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$
$$\mathrm{L}_{13} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial\lambda_1}, \qquad \mathcal{L}_{13} = -\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial l_1}.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (4 *bis*) et aux égalités (9), donnent

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_{12} + \mathrm{A}_{13}, \qquad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{13},$$
$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$
$$\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_{12} + \mathrm{L}_{13}, \qquad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{13}.$$

De ces égalités, et d'autres égalités analogues, qui se démontreraient de la même manière, on déduirait le théorème suivant :

Dans un système complexe formé de plusieurs systèmes indépendants, les actions que chacun de ces derniers subit de la part de l'ensemble des autres s'obtiennent en superposant les actions qu'il subirait de la part de chacun des autres, si chacun des autres était placé seul en sa présence.

On voit que *ce théorème, bien que compatible avec la définition des actions mutuelles qui s'exercent entre divers systèmes, n'en est cependant pas une conséquence nécessaire.* Toutes les fois que, dans une théorie particulière, on en admettra l'exactitude, on fera par cela même une hypothèse.

Revenons à l'étude générale d'un système Σ composé de n systèmes

indépendants $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Supposons que ces n systèmes soient n corps dont chacun occupe, dans l'espace, une position variable, mais possède un état invariable. Nous dirons alors que *toute modification du système est un déplacement sans changement d'état.*

Lorsqu'on déplace simplement le système S_i dans l'espace, sans en changer les propriétés, l'énergie interne U_i de ce système demeure invariable; par conséquent, dans un déplacement sans changement d'état, chacune des quantités $U_1, U_2, \ldots, U_n$ demeure invariable. D'après l'égalité (5), l'énergie interne Υ du système Σ ne diffère que par une constante de la fonction Ψ. On arrive donc au théorème suivant :

Lorsqu'un système complexe, formé de plusieurs systèmes indépendants, est assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état, l'ensemble des actions qui s'exercent entre les divers systèmes partiels admet pour potentiel le produit de l'énergie interne du système complexe par l'équivalent mécanique de la chaleur.

Ce théorème est très fréquemment employé dans les applications de la Thermodynamique.

De ce théorème en découle un autre :

Soit $\mathfrak{T}$ la force vive du système Σ. L'énergie totale de ce système aura pour valeur $\left(\Upsilon + \frac{1}{E}\mathfrak{T}\right)$. Si le système Σ est isolé, cette énergie totale ne peut varier. L'égalité

$$\Upsilon + \frac{1}{E}\mathfrak{T} = \text{const.}$$

doit subsister dans toute modification du système. Si le système Σ est assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état, cette égalité pourra être remplacée par la suivante

$$E\Psi + \mathfrak{T} = \text{const.}$$

ou

$$E\,d\Psi + d\mathfrak{T} = 0.$$

Or $(-\mathrm{E}\,d\Upsilon)$ représente le travail qu'ont effectué les actions qui s'exercent entre les systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_n$, pendant que la force vive du système Σ a augmenté de $d\mathfrak{T}$; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Concevons un système complexe, formé de systèmes indépendants, isolé, et assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état; dans toute modification réelle que subit un pareil système, sa force vive subit un accroissement égal au travail qu'accomplissent les actions qui s'exercent entre les divers systèmes partiels dont il est composé.

On remarquera que nous avons défini les forces et les influences qu'un système matériel subit de la part d'un autre système dont il est indépendant; nous n'avons pas défini les forces ou les influences qui s'exercent entre deux parties d'un même système, lorsque ces deux parties ne peuvent être regardées comme deux systèmes indépendants. Parfois, en Physique, on parle de semblables forces ou de semblables influences; c'est ainsi qu'en Électrodynamique on parle des actions qui s'exercent entre les diverses parties d'un même conducteur traversé par des courants. Lorsqu'on voudra considérer de semblables actions, on devra en donner une définition spéciale, et il n'y aura pas lieu de s'étonner si les actions ainsi définies ne satisfont pas à certains théorèmes auxquels les actions qui s'exercent entre systèmes indépendants, définies comme nous venons de le faire, sont nécessairement assujetties. Cette remarque trouve, en Électrodynamique et en Électromagnétisme, d'importantes applications.

5. *De la quantité de chaleur.* — Revenons à l'équation fondamentale (3).

Posons

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Big[\left(\mathrm{A} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right)u \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \left(\mathrm{L} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \varpi}\right)\varpi \\
&\quad + \left(\mathcal{A} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\right)\varphi + \ldots + \left(\mathcal{L} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l}\right)\psi\Big]\,dt = \mathrm{E}\,d\mathrm{Q},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[\ \ \left(A' - E\frac{\partial U'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial u'}\right)u' \\ &\ \ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ \ + \left(L' - E\frac{\partial U'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial w'}\right)w' \\ &\ \ + \left(\mathcal{A}' - E\frac{\partial U'}{\partial a'}\right)\varphi' + \ldots + \left(\mathcal{L}' - E\frac{\partial U'}{\partial l'}\right)\psi'\Big]dt = E\,dQ'. \end{aligned}\right.$$

L'égalité (3) deviendra, en tenant compte des égalités (4) et des égalités analogues relatives aux actions du système S sur le système S',

$$(11)\qquad dQ + dQ' = 0.$$

Nous donnerons à la quantité dQ le nom de *quantité de chaleur dégagée par le système* S dans le temps dt; lorsque cette quantité sera négative, nous dirons que sa valeur absolue est la *quantité de chaleur absorbée* par le système S durant le même temps. La quantité dQ' sera de même nommée la *quantité de chaleur* dégagée par le système S' pendant le temps dt.

L'égalité (11) nous enseigne alors que, *si l'on considère un système complexe isolé* Σ, *formé de deux systèmes indépendants* S *et* S', *dans toute modification réelle du système* Σ, *l'un des deux systèmes* S, S', *dégage autant de chaleur que l'autre en absorbe.*

Supposons le système S isolé dans l'espace. Le système S' n'existant pas, tous les termes qui composent le premier membre de l'égalité (10 *bis*) sont identiquement nuls. Il en est de même de dQ' et partant, d'après l'égalité (11), de dQ. De là le théorème suivant :

Lorsqu'un système, isolé dans l'espace, éprouve une modification réelle, il n'absorbe pas et ne dégage pas de chaleur.

Diverses théories de Physique nous conduisent à regarder un corps comme susceptible de dégager de la chaleur ou d'en absorber alors même que ce corps nous semble isolé dans le vide; cette manière de voir n'est compatible avec la définition que nous venons de donner pour la quantité de chaleur dégagée par un système que si nous regardons l'espace qui nous semble vide comme rempli par un certain

corps, l'éther. Cette remarque aide à saisir l'importance du théorème précédent.

Posons

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} - \mathrm{A} = \mathrm{ER}_\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} - \mathrm{L} = \mathrm{ER}_\lambda, \end{aligned}\right.$$

$$(12\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a} - \mathcal{A} = \mathrm{E}\mathcal{R}_a, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l} - \mathcal{L} = \mathrm{E}\mathcal{R}_l. \end{aligned}\right.$$

Nous donnerons aux quantités $R_\alpha, \ldots, R_\lambda, \mathcal{R}_a, \ldots, \mathcal{R}_l$ le nom de *coefficients calorifiques* du système S, soumis à l'action du système S′ et animé du mouvement qui l'anime à l'instant t. Nous voyons, en effet, que ces coefficients dépendent :

1° Des propriétés du système S;

2° Des vitesses et des accélérations des divers points de ce système;

3° Des actions du système S′ sur le système S.

Envisageons une modification virtuelle $\delta\alpha, \ldots, \delta\lambda, \delta a, \ldots, \delta l$ du système S. Par définition, la quantité

$$(13)\qquad dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + \mathcal{R}_a\,\delta a + \ldots + \mathcal{R}_l\,\delta l)$$

se nomme la *quantité de chaleur dégagée par le système* S *dans la modification virtuelle considérée.*

Cette quantité, on le voit, n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction de $\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l$, car les coefficients de $\delta\alpha, \ldots, \delta\lambda, \delta a, \ldots, \delta l$ dépendent, en général, d'autres variables.

Nous savons que la quantité

$$(14)\qquad d\mathfrak{T} = \mathrm{A}\,\delta\alpha + \ldots + \mathrm{L}\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l$$

représente le travail virtuel des actions exercées sur le système S.

Nous donnerons à la quantité

$$(15)\qquad d\tau = \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right)\delta\alpha + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right)\delta\lambda$$

le nom de *travail virtuel des forces d'inertie appliquées au système* S.

Les égalités (12), (12 *bis*), (13), (14) et (15) nous donnent alors l'égalité suivante, applicable à toute transformation virtuelle du système S,

$$(16)\qquad \mathrm{E}(dQ + \delta U) = d\varpi + d\tau.$$

En multipliant par l'équivalent mécanique de la chaleur la somme de la quantité de chaleur dégagée par un système durant une modification virtuelle et de la variation subie par l'énergie interne du système durant la même modification, on obtient un certain produit; ce produit est égal au travail virtuel des actions extérieures et des forces d'inertie appliquées au système.

Cette proposition constitue l'énoncé le plus général de la *loi de l'équivalence de la chaleur et du travail.*

Lorsqu'on a affaire non plus à une modification virtuelle quelconque, mais à une modification réelle, l'égalité (16) peut se transformer. Dans ce cas, en effet, le travail $d\tau$ des forces d'inertie devient égal à la variation changée de signe de la force vive, et l'on peut écrire

$$(17)\qquad d\varpi - \mathrm{E}\,dQ = \frac{d}{dt}(\mathrm{E}U + \mathfrak{T})\,dt.$$

On voit que, *pour toute modification réelle, la quantité*

$$d\varpi - \mathrm{E}\,dQ$$

est une différentielle totale.

Considérons un système Σ formé de deux systèmes partiels indépendants, S_1, S_2; soit σ le système formé par l'ensemble des corps étrangers à Σ.

Soient

$$U_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1),$$
$$U_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2)$$

les énergies internes des systèmes S_1, S_2, considérés isolément.

Le système Σ aura pour énergie interne la quantité

$$\Upsilon = U_1 + U_2 + \Psi_{12}(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2).$$

Soit u l'énergie interne du système σ considéré isolément. L'énergie interne du système formé par l'ensemble $\Sigma\sigma$ aura pour expression

$$\Upsilon + u + X,$$

X dépendant des variables qui définissent la position et les propriétés de chacun des trois systèmes S_1, S_2, σ.

Supposons que le système Σ éprouve une modification virtuelle

$$\delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_1, \quad \delta a_1, \quad \ldots, \quad \delta l_1, \quad \delta\alpha_2, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_2, \quad \delta a_2, \quad \ldots, \quad \delta l_2,$$

et cherchons l'expression de la quantité de chaleur dQ dégagée par le système Σ. Nous aurons

$$\begin{aligned}
E\,dQ = -\Big[& \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\alpha_1} + E\frac{\partial X}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u_1}\right)\delta\alpha_1 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\lambda_1} + E\frac{\partial X}{\partial\lambda_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w_1}\right)\delta\lambda_1 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial a_1} + E\frac{\partial X}{\partial a_1}\right)\delta a_1 + \ldots + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial l_1} + E\frac{\partial X}{\partial l_1}\right)\delta l_1 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\alpha_2} + E\frac{\partial X}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u_2}\right)\delta\alpha_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\lambda_2} + E\frac{\partial X}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w_2}\right)\delta\lambda_2 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial a_2} + E\frac{\partial X}{\partial a_2}\right)\delta a_2 + \ldots + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial l_2} + E\frac{\partial X}{\partial l_2}\right)\delta l_2\Big].
\end{aligned}$$

Mais la force vive $\mathfrak{T}$ du système Σ est la somme des forces vives $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ des systèmes S_1, S_2. On voit donc sans peine que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} E\,dQ = -\Big\{ & \left[E\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(U_1+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial u_1}\right]\delta\alpha_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[E\frac{\partial}{\partial\lambda_1}(U_1+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial w_1}\right]\delta\lambda_1 \\ & + E\frac{\partial}{\partial a_1}(U_1+\Psi_{12}+X)\delta a_1 + \ldots + E\frac{\partial}{\partial l_1}(U_1+\Psi_{12}+X)\delta l_1 \Big\} \\ & - \left[E\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(U_2+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial u_2}\right]\delta\alpha_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[E\frac{\partial}{\partial\lambda_2}(U_2+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial w_2}\right]\delta\lambda_2 \\ & + E\frac{\partial}{\partial a_2}(U_2+\Psi_{12}+X)\delta a_2 + \ldots + E\frac{\partial}{\partial l_2}(U_2+\Psi_{12}+X)\delta l_2 \Big\} \\ = \; & E(dQ_1 + dQ_2), \end{aligned}$$

dQ_1, dQ_2 désignant les quantités de chaleur que, dans la même modification virtuelle, dégagent les deux systèmes S_1, S_2. On arrive ainsi au théorème suivant :

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes, la quantité de chaleur qu'il dégage dans une modification virtuelle quelconque est égale à la somme algébrique des quantités de chaleur que ses diverses parties dégagent dans la même modification.

Ce théorème nous sera utile dans la suite.

Ici vient naturellement se placer une réflexion semblable à celle que nous a suggérée la définition du travail : on ne peut parler de la quantité de chaleur dégagée par chacune des parties d'un système qu'autant que chacune de ces parties peut être considérée comme un système indépendant. Lorsque les diverses parties d'un système ne sont pas indépendantes les unes des autres, le mot : quantité de chaleur dégagée par chacune d'elles n'a aucun sens.

4. *Le problème classique de la Dynamique.* — Supposons que, pour un certain système, les coefficients calorifiques

$$R_\alpha, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad \mathfrak{R}_a, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_l$$

soient tous égaux à o identiquement, ou, en d'autres termes, que la quantité de chaleur dégagée par le système dans une modification réelle ou virtuelle quelconque soit égale à o. Les égalités (12) et (12 *bis*) deviendront

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} - A = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} - L = 0, \end{array}\right.$$

$$(18\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} E\dfrac{\partial U}{\partial a} - \mathcal{A} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial l} - \mathcal{L} = 0. \end{array}\right.$$

On reconnaît les équations du mouvement d'un système dans lequel les frottements sont nuls; dans le cas que l'on étudie ordinairement en Mécanique, il n'existe pas d'autres variables que celles qui figurent dans les équations (1) du Chapitre I; il n'existe donc pas d'équation du type (18 *bis*); toutes les équations qui régissent le mouvement du système ont la forme (18), donnée, on le sait, par Lagrange.

On voit que les lois de la Dynamique rentrent, comme cas particulier, dans les lois de la Thermodynamique; elles se déduisent de ces dernières en supposant tous les coefficients calorifiques du système égaux à o; mais dans quel cas cette hypothèse est-elle vérifiée? C'est une question qui reste à examiner et que rien, dans ce que nous avons dit jusqu'ici, ne permet de résoudre. Dans la plupart des cas, elle n'est résolue que par voie d'hypothèse, directe ou indirecte. D'ailleurs, nous verrons plus tard qu'il existe une autre manière, distincte de celle-là, de faire dériver les équations de la Dynamique des équations de la Thermodynamique.

5. *Calorimétrie.* — Imaginons un système isolé formé lui-même de trois systèmes indépendants, S_1, S_2, S_3, à l'égard desquels nous ferons certaines suppositions.

Soient U_1, U_2, U_3 les énergies internes des systèmes S_1, S_2, S_3 considérés isolément; l'énergie interne du système complexe formé par leur ensemble pourra s'écrire

$$\Upsilon = U_1 + U_2 + U_3 + \Psi.$$

1° A l'égard de la fonction Ψ, nous supposerons qu'elle soit de la forme

$$\Psi = \Psi_{23} + \Psi_{31} + \Psi_{12},$$

la fonction Ψ_{ij} dépendant uniquement des variables qui caractérisent l'état des deux systèmes S_i, S_j. Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante : Les actions que l'un quelconque des trois systèmes S_1, S_2, S_3 éprouve de la part de l'ensemble des deux autres s'obtiennent en composant entre elles les actions qu'il éprouve de la part de chacun des deux autres pris isolément.

2° Les actions du système S_3 sur le système S_1 sont nulles, ou sont telles qu'elles n'effectuent aucun travail dans les modifications du système S_1 que l'on a à étudier.

3° Les actions du système S_2 sur le système S_1 sont nulles; il en est de même des actions du système S_1 sur le système S_2.

De ces deux hypothèses résultent les conséquences suivantes :

Dans les modifications du système S_1 que l'on a à étudier, le travail des actions extérieures appliquées à ce système est toujours égal à o.

Les actions extérieures appliquées au système S_2 se réduisent aux actions exercées par le système S_3.

4° La quantité de chaleur dégagée ou absorbée par le système S_3 est constamment égale à o.

Comme la quantité de chaleur dégagée par l'ensemble S_1, S_2, S_3, qui forme un système isolé, doit être égale à o; comme, d'autre part, cette quantité de chaleur doit être égale à la somme des quantités de chaleur dégagée par chacun des trois systèmes S_1, S_2, S_3, on voit que la quantité de chaleur dQ_2, dégagée pendant le temps dt par le système S_2, sera égale et de signe contraire à la quantité de chaleur dQ_1, déga-

gée par le système S_1 pendant le même temps,

$$(19) \qquad dQ_1 + dQ_2 = 0.$$

A l'égard de la quantité dQ_1, on peut écrire, en vertu de l'égalité (10), et en observant que, d'après nos hypothèses,

$$(A_1 u_1 + \ldots + L_1 w_1 + \mathcal{A}_1 \varphi_1 + \ldots + \mathcal{L}_1 \psi_1)\, dt = 0,$$

l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\Big[& \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1}\right) u_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial w_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1}\right) w_1 \\ & + E\frac{\partial U_1}{\partial a_1}\varphi_1 + \ldots + E\frac{\partial U_1}{\partial l_1}\psi_1 \Big] dt = -E\, dQ_1.\end{aligned}$$

En vertu de l'égalité (19), celle-ci devient

$$\begin{aligned}E\, dQ_2 = \Big[& \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1}\right) u_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial w_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1}\right) w_1 \\ & + E\frac{\partial U_1}{\partial a_1}\varphi_1 + \ldots + E\frac{\partial U_1}{\partial l_1}\psi_1 \Big] dt.\end{aligned}$$

Cette égalité s'intègre immédiatement et donne l'expression suivante pour la quantité de chaleur Q_2 dégagée par le système S_2 pendant une modification finie quelconque

$$(20) \qquad EQ_2 = EU''_1 + \mathfrak{T}''_1 - EU'_1 - \mathfrak{T}'_1,$$

U'_1, $\mathfrak{T}'_1$ représentant les valeurs de U_1, $\mathfrak{T}_1$ à l'instant initial de la modification, et U''_1, $\mathfrak{T}''_1$ représentant les valeurs de U_1, $\mathfrak{T}_1$ à l'instant final de la même modification.

Cette égalité (20) permet déjà d'apprécier l'égalité des quantités de chaleur dégagées par des modifications différentes produites au sein de systèmes différents.

Supposons, en effet, que nous conservions le système S_1, mais que nous remplacions l'ensemble (S_2, S_3) par divers ensembles (S'_2, S'_3), (S''_2, S''_3), ..., les hypothèses indiquées demeurant toujours vérifiées. Si, durant des modifications diverses de ces divers ensembles, le système S_1 est toujours parti du même état initial et du même mouvement initial pour aboutir au même état final et au même mouvement final, les quantités de chaleur Q_2, Q'_2, Q''_2, ..., dégagées dans ces diverses modifications par les systèmes S_2, S'_2, S''_2, ..., soumis respectivement aux actions des S_1, S'_1, S''_1, ..., sont égales entre elles.

Imposons maintenant au système S_1 de nouvelles restrictions :

5° Le système S_1 est en repos au début et à la fin de chacune des modifications que nous étudions, ou, s'il est en mouvement, son mouvement absolu est le même dans les deux cas;

6° L'état du système S_1 est fixé par la connaissance d'une seule variable α_1;

7° Dans les modifications étudiées, la valeur finale de cette variable α''_1 diffère peu de sa valeur initiale α'_1.

La cinquième hypothèse nous donne

$$\mathfrak{T}''_1 - \mathfrak{T}'_1 = 0.$$

La sixième et la septième nous permettent d'écrire

$$U''_1 - U'_1 = \varpi_1(\alpha''_1 - \alpha'_1),$$

ϖ_1 dépendant uniquement de l'état initial du système S_1.

L'égalité (20) devient alors

$$Q_2 = \varpi_1(\alpha''_1 - \alpha'_1).$$

Si donc nous avons soin de toujours prendre le système S_1 dans le même état initial, et si, dans diverses modifications des ensembles (S_1, S_2), (S'_1, S'_2), (S''_1, S''_2), ..., nous observons les variations

$(\alpha_1'' - \alpha_1')$, $(\alpha_1'' - \alpha_1')'$, $(\alpha_1'' - \alpha_1')''$, ... subies par la variable qui définit l'état du système S_1, nous pourrons déterminer les valeurs relatives des quantités de chaleur Q_2, Q_2', Q_2'', ... dégagées par les systèmes S_2, S_2', S_2'', ... dans ces diverses modifications.

Le système S_1 que nous venons de définir se nomme un *calorimètre*. Les calorimètres usités dans la pratique ne réalisent que d'une manière approchée ce type idéal du calorimètre; par des corrections diverses, fondées soit sur des hypothèses directes, soit sur les conséquences de diverses théories physiques, on s'efforce de diminuer l'écart entre leurs indications et celles du calorimètre idéal. Nous laissons au lecteur le soin de rechercher par quelle suite d'idées, dans chaque cas particulier, on est conduit à admettre que le calorimètre réel vérifie sensiblement les sept hypothèses que nous avons énumérées ([1]).

Le calorimètre détermine le rapport de deux quantités de chaleur dégagées par deux systèmes différents dans deux circonstances différentes; il permettra donc de déterminer la valeur d'une quantité de chaleur, de la mesurer d'une manière absolue, si l'on connaît la quantité de chaleur prise pour unité.

La définition donnée par les égalités (10), (12), (12 *bis*) et (13), de la quantité de chaleur dégagée durant une modification réelle ou virtuelle d'un système, montre qu'une quantité de chaleur est une grandeur de même espèce qu'une œuvre; l'unité de quantité de chaleur est donc déterminée lorsqu'on connaît l'unité d'œuvre. Effectivement, de l'égalité (10), il est facile de conclure la proposition suivante :

Si l'œuvre accomplie, durant une modification quelconque d'un système, par les corps étrangers à ce système, est égale à l'unité d'œuvre; et si, durant cette modification, les actions exercées sur ce système par les corps étrangers n'effectuent aucun travail, le sys-

---

([1]) Dans la pratique, le système S_1, invariablement lié à la terre, n'a pas *rigoureusement* le même mouvement absolu au début et à la fin de chaque modification; mais, étant données les hypothèses admises au sujet du mouvement absolu de la terre, le mouvement absolu du calorimètre subit, au cours d'une opération, des variations qui n'exercent qu'une influence négligeable sur les résultats des déterminations expérimentales.

tème absorbe durant cette modification une quantité de chaleur égale à l'unité.

A l'égard de l'unité d'œuvre, nous n'avons jusqu'ici établi aucune convention; une seule convention a été établie au sujet du *signe* de l'œuvre; nous sommes convenus de choisir ce signe de telle sorte que l'œuvre accomplie pour mettre un système en mouvement, sans changer son état, soit positive. Nous pouvons donc prendre pour unité d'œuvre une œuvre quelconque, pourvu qu'elle soit positive.

Nous allons prouver que l'œuvre accomplie pour élever la température de l'unité de masse d'eau (dont nous supposons l'état défini uniquement par la température) d'une première température déterminée, que nous nommons le o de l'échelle centigrade, à une autre température déterminée, que nous nommons le $+1$ de l'échelle centigrade, est positive. Nous pourrons alors prendre cette œuvre pour unité d'œuvre, l'unité de quantité de chaleur sera la quantité de chaleur absorbée par l'unité de masse d'eau, lorsque, sans travail externe, sa température s'élève de 0° C. à $+1^\circ$ C.

Pour démontrer la proposition énoncée, imaginons que nous ayons un système complexe et isolé, formé lui-même de deux systèmes indépendants S et S'. Le système S est immobile; son état est supposé défini uniquement par sa température; le système S' est un corps mobile dont l'état est supposé invariable. Ces deux systèmes S et S' n'exercent aucune action l'un sur l'autre. Si l'on désigne par $U(\mathfrak{T})$ l'énergie interne du système S, supposé isolé et porté à la température $\mathfrak{T}$; par $\mathfrak{C}$ la force vive du système S', l'énergie totale de notre système complexe aura la forme très simple

$$\mathcal{E} = U(\mathfrak{T}) + \frac{\mathfrak{C}}{E}.$$

Au début de la modification, le système S a la température $\mathfrak{T}$; le système S' est en mouvement, et sa force vive a la valeur $\mathfrak{C}$. Le système S' vient heurter le système S et rebondit. Après le choc, il a une force vive $\mathfrak{C}'$; le système S a une température $\mathfrak{T}'$. Le système étant

supposé isolé, l'énergie totale n'a pas varié. On a donc

$$U(\mathfrak{S}) + \frac{\mathfrak{T}}{E} = U(\mathfrak{S}') + \frac{\mathfrak{T}'}{E}$$

ou

$$\frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{E} = U(\mathfrak{S}') - U(\mathfrak{S}). \tag{21}$$

L'expérience montre que $\mathfrak{T}'$ est inférieur à $\mathfrak{T}$; donc

$$[U(\mathfrak{S}') - U(\mathfrak{S})]$$

est positif.

Le système S, passant sans travail externe et sans variation de force vive de la température $\mathfrak{S}$ à la température $\mathfrak{S}'$, absorberait une quantité de chaleur *positive* donnée par l'égalité

$$Q = U(\mathfrak{S}') - U(\mathfrak{S}). \tag{22}$$

Nous connaissons donc une modification qui absorbe une quantité de chaleur positive. Le calorimètre, qui nous donne en grandeur et en signe le rapport des quantités de chaleur dégagées dans deux modifications, nous permet, dès lors, de déterminer le signe de toute quantité de chaleur et de prouver *expérimentalement* la proposition énoncée.

L'unité de quantité de chaleur étant déterminée, le calorimètre nous permet de mesurer une quantité quelconque de chaleur, en particulier la quantité de chaleur Q, donnée par l'égalité (22). Si l'on mesure, d'autre part, la variation de force vive $(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}')$, on déduira de l'égalité (21) une détermination expérimentale de l'équivalent mécanique de la chaleur E.

On sait que G.-A. Hirn a réalisé une expérience réelle voisine de l'expérience idéale que nous venons de décrire.

D'autres méthodes ont été employées, notamment par Joule, pour déterminer la valeur de E. Les principes posés conduisent aisément à la justification de ces méthodes.

Théorie des permutations et des arrangements circulaires *complets* (1);

PAR M. E. JABLONSKI,
Professeur au lycée Charlemagne.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉTHODE POUR CALCULER LE NOMBRE DES PERMUTATIONS ET DES ARRANGEMENTS CIRCULAIRES AVEC RÉPÉTITIONS.

1. La théorie des permutations et des arrangements avec ou sans répétitions est complètement faite pour le cas où toutes les lettres qui les composent sont supposées placées en ligne droite ou plus généralement le long d'une ligne non fermée; pour rappeler cette distribution, on les appelle *rectilignes*. Lorsque les lettres sont supposées écrites le long d'une circonférence ou d'une ligne fermée quelconque, les permutations ou les arrangements sont dits *circulaires* et je ne crois pas que l'on ait encore résolu la question d'en déterminer le nombre, sauf dans le cas particulier où il n'y a pas répétition d'une ou de plusieurs lettres. C'est pour la solution générale de cette question que je vais exposer une méthode très élémentaire; je m'occuperai d'abord des permutations, puis des arrangements, cet ordre est ici nécessaire, et enfin, dans la seconde Partie de ce travail, je montrerai comment on peut réduire les résultats en formules générales.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (avril 1892).

2. *Permutations circulaires.* — Le cas où aucune lettre n'est répétée est bien connu : je vais le rappeler cependant, pour lui appliquer le mode de raisonnement qui m'a conduit à la solution de la question générale.

Soit Q_m le nombre des permutations circulaires de m lettres sans répétitions; Q_{m-1} le même nombre pour $m-1$ lettres; si l'on applique d'abord la méthode usitée pour les permutations rectilignes sans répétitions, on trouve la formule de récurrence

$$(1) \qquad Q_m = (m-1)\,Q_{m-1}.$$

Elle diffère de la formule connue pour les permutations rectilignes simples

$$P_m = m\,P_{m-1}.$$

La raison en est que $m-1$ lettres rangées en cercles présentent $m-1$ places seulement où l'on peut introduire la $m^{\text{ième}}$ lettre, tandis qu'elles en présentent m, lorsqu'elles sont disposées en ligne droite. De la formule (1), on tire

$$Q_m = 1.2.3\ldots(m-1) = (m-1)!$$

ou

$$(2) \qquad Q_m = \frac{P_m}{m}.$$

Cette méthode calquée sur celle qui sert pour les permutations rectilignes ne réussit plus lorsqu'il y a répétition d'une ou de plusieurs lettres, il faut se placer à un autre point de vue.

Concevons une permutation rectiligne simple de m lettres et écrivons ces lettres sur un cercle, dans l'ordre où on les lit de gauche à droite, nous aurons ainsi une permutation circulaire simple des mêmes lettres. Si au lieu de commencer la lecture par la première lettre à gauche, on la commence par une quelconque, en allant toujours de gauche à droite, et reprenant la lecture à partir de la première à gauche dès que l'on a atteint la dernière à droite, on retrouve toujours la même permutation circulaire : donc, comme on peut commencer la lecture à partir d'une quelconque des m lettres, on voit que

chaque permutation rectiligne simple donne m fois la même permutation circulaire simple, d'où la relation

$$P_m = mQ_m,$$

c'est-à-dire la relation (2).

3. Le raisonnement précédent serait en défaut si deux lectures d'une même permutation rectiligne faites à partir de deux lettres de rangs différents, la première et celle de rang $p+1$, redonnaient la même permutation rectiligne, parce qu'alors on emploierait plusieurs fois cette même permutation rectiligne et il ne serait plus vrai de dire qu'une permutation rectiligne prise une seule fois donne m fois la même permutation circulaire. Cette circonstance se présente lorsque, les p premières lettres étant transportées dans leur ordre à la suite de la dernière, on retrouve la même permutation rectiligne, c'est-à-dire lorsque la permutation rectiligne considérée peut se partager exactement en groupes identiques de p lettres. Cela exige d'abord que p soit un diviseur de m et ensuite que chaque lettre soit répétée $\frac{m}{p}$ fois au moins; cette particularité ne se produit pas pour les permutations sans répétitions.

4. Considérons maintenant les permutations rectilignes avec répétitions de plusieurs lettres

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad l,$$

respectivement répétées

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \lambda$$

fois, et soit

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda = m.$$

Leur nombre est, comme on le sait,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta\ldots1.2.3\ldots\lambda}$$

ou

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

J'examine d'abord le cas où

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \lambda$$

n'ont aucun diviseur commun autre que l'unité. Alors, comme dans le cas des permutations simples, il est impossible qu'une permutation rectiligne se partage en groupes identiques, car, chaque lettre devant être répétée le même nombre de fois dans chaque groupe, il faudrait que tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ fussent divisibles par un même nombre entier autre que l'unité, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte que, dans ce cas, le nombre des permutations circulaires avec les mêmes répétitions est encore égal au nombre des permutations rectilignes divisé par m, c'est-à-dire à

$$\frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}.$$

5. Supposons que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ n'aient qu'un seul diviseur premier commun d, il divise aussi leur somme m. Soient

$$\alpha = \alpha_1 d,\qquad \beta = \beta_1 d,\qquad \gamma = \gamma_1 d,\qquad \ldots,$$
$$\lambda = \lambda_1 d,\qquad m = m_1 d.$$

L'ensemble des permutations rectilignes peut se décomposer en deux catégories et deux seulement. D'abord les permutations rectilignes qui ne peuvent pas se partager en groupes identiques de m_1 lettres, puis celles où ce partage est possible, soient Q et Q_1 leurs nombres respectifs. On a évidemment

$$Q + Q_1 = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

puis, si l'on observe qu'il suffit, pour avoir toutes les permutations rectilignes de la seconde catégorie, de considérer toutes celles qui constituent un des groupes, on a

$$Q_1 = \frac{m_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!}.$$

Ces deux relations donnent Q et Q_1. Cela posé, chacune des Q permutations rectilignes de la première catégorie donne m fois la même permutation circulaire et chacune des Q_1 de la seconde catégorie donne m_1 fois la même permutation circulaire : donc le nombre cherché des permutations circulaires avec les mêmes répétitions est

$$\frac{Q}{m}+\frac{Q_1}{m_1};$$

chacune des parties de cette somme est nécessairement un nombre entier.

6. Supposons maintenant que $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ admettent deux diviseurs premiers communs d et d_1, soit

$$\begin{array}{lllll}
\alpha=\alpha_1 d, & \beta=\beta_1 d, & \ldots, & \lambda=\lambda_1 d, & m=m_1 d, \\
\alpha=\alpha_2 d_1, & \beta=\beta_2 d_1, & \ldots, & \lambda=\lambda_2 d_1, & m=m_2 d_1, \\
\alpha=\alpha_3 d d_1, & \beta=\beta_3 d d_1, & \ldots, & \lambda=\lambda_3 d d_1, & m=m_3 d d_1.
\end{array}$$

L'ensemble des permutations rectilignes peut se décomposer en quatre catégories :

1° Celles qui ne peuvent pas se partager en groupes identiques de lettres au nombre de m_1, ou de m_2 ou de m_3, soit Q leur nombre;

2° Celles qui se partagent en groupes identiques de m_1 lettres et pas moins, soit Q_1 leur nombre;

3° Celles qui se partagent en groupes identiques de m_2 lettres et pas moins, soit Q_2 leur nombre;

4° Enfin celles qui se partagent en groupes identiques de m_3 lettres et pas moins, soit Q_3 leur nombre.

On a évidemment

$$Q+Q_1+Q_2+Q_3=\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

Si, au lieu des données $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ on prend $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, puis α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$ et enfin $\alpha_3, \beta_3, \ldots, \lambda_3$, que l'on répète le même raisonne-

ment, on aura de même

$$Q_1 + Q_3 = \frac{m_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!},$$

$$Q_2 + Q_3 = \frac{m_2!}{\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!},$$

$$Q_3 = \frac{m_3!}{\alpha_3!\,\beta_3!\ldots\lambda_3!}.$$

Ces quatre relations déterminent les nombres Q, Q_1, Q_2, Q_3 et le nombre cherché des permutations circulaires avec les mêmes répétitions est

$$\frac{Q}{m} + \frac{Q_1}{m_1} + \frac{Q_2}{m_2} + \frac{Q_3}{m_3}.$$

7. Ce qui précède suffit pour faire comprendre la méthode ; j'aborde le cas le plus général.

Soit d_n le plus grand commun diviseur des nombres

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \lambda,$$

et soient

$$1,\quad d_1,\quad d_2,\quad \ldots,\quad d_p,\quad \ldots,\quad d_n$$

tous les diviseurs de d_n, c'est-à-dire tous les diviseurs communs à α, β, ..., λ. Posons

$$\alpha = \alpha_p d_p, \qquad \beta = \beta_p d_p, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \lambda_p d_p, \qquad m = m_p d_p.$$

On peut toujours mettre tous les diviseurs de d_n dans un ordre tel que d_p n'ait aucun diviseur dans la suite des diviseurs de d_n qui soit d'indice supérieur à p, on sait d'ailleurs qu'il ne peut avoir aucun diviseur en dehors de cette suite ; il en résultera que tous les diviseurs de $\frac{d_n}{d_p}$ sont parmi ceux de d_n dont l'indice est supérieur ou égal à p.

Cela posé, on peut partager l'ensemble des permutations rectilignes en autant de catégories qu'il y a de diviseurs de d_n, chaque catégorie étant caractérisée par ce fait qu'une permutation rectiligne qui en fait partie peut se partager en d_p groupes identiques de m_p lettres et pas moins ; soit Q_p leur nombre. On a alors pour déterminer les nombres

entiers Q_p au nombre de $n+1$, les $n+1$ équations linéaires

$$Q + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_p + \ldots + Q_n = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

$$Q_1 + \ldots + Q_i + \ldots + Q_n = \frac{m_1!}{\alpha_1!\,\beta!_1\ldots\lambda_1!},$$

$$Q_2 + \ldots + Q_j + \ldots + Q_n = \frac{m_2!}{\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$Q_n = \frac{m_n!}{\alpha_n!\,\beta_n!\ldots\lambda_n!};$$

d_i est l'un quelconque des diviseurs de $\frac{d_n}{d_1}$;

d_j est l'un quelconque des diviseurs de $\frac{d_n}{d_2}$;

. . . .

Ces équations déterminent complètement les inconnues, car le déterminant principal se réduit à sa diagonale principale et est égal à $+1$.

Connaissant ces nombres, on a immédiatement le nombre demandé des permutations circulaires avec les mêmes répétitions, savoir

$$\frac{Q}{m} + \frac{Q_1}{m_1} + \frac{Q_2}{m_2} + \ldots + \frac{Q_p}{m_p} + \ldots + \frac{Q_n}{m_n};$$

chacune des parties de cette somme est un nombre entier.

La question est complètement résolue; nous verrons plus loin comment on peut exprimer le résultat par une formule simple.

8. *Arrangements circulaires avec répétitions.* — Je considère d'abord les arrangements rectilignes, c'est-à-dire tous les groupes de m lettres que l'on peut former avec p lettres distinctes a, b, c, ..., l disposées en ligne droite et dont chacune peut être répétée jusqu'à m fois, de façon que deux groupes diffèrent soit par l'ordre, soit par le choix des lettres. On peut les décomposer en permutations avec répétitions de m lettres.

A cet effet, je considère tous les systèmes de solutions en nombres

entiers positifs ou nuls de l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m,$$

où α, β, γ, ..., λ sont au nombre de p; je les appelle des *indices*.

Je ne prends parmi ces systèmes que ceux qui sont distincts, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent pas se déduire les uns des autres par une simple permutation des mêmes indices.

Soit k le nombre des indices d'un même système qui ne sont pas nuls, $k \leq p$. Je prends k lettres parmi les p lettres données $a, b, c, \ldots, l$ et je forme toutes les permutations avec répétitions de ces k lettres, où la première est répétée α fois, la seconde β fois, etc. Je fais cette même opération avec le même système d'indices sur tous les arrangements simples que je puis former avec les p lettres données, prises k à k, et j'ai ainsi toutes les permutations qui répondent à un même système d'indices, mais elles ne sont distinctes que si tous les indices du système considéré sont distincts.

Dans ce cas, le nombre total des permutations ainsi formées, qui répondent à un même système d'indices, est

$$p(p-1)\ldots(p-k+1)\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

Mais si les indices de ce système se partagent en q groupes : savoir, en i_1, i_2, i_3, ..., i_q égaux entre eux de façon que

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_q = k,$$

il faudra, pour avoir le nombre total de permutations distinctes répondant au système des indices, diviser le nombre précédemment trouvé par le produit

$$i_1!\, i_2!\, \ldots\, i_q!$$

ce qui donne l'expression générale de ce nombre

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{i_1!\, i_2!\ldots i_q!}\;\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

En calculant ce nombre pour chacun des systèmes distincts d'indices

et les ajoutant on doit trouver le nombre des arrangements rectilignes avec répétitions, ou arrangements complets de p lettres m à m.

Cela est aisé à vérifier; on sait que ce nombre est p^m; or, si l'on développe

$$(a+b+c+\ldots+l)^m,$$

la somme précédemment formée est celle des termes distincts de ce développement; donc, si l'on fait

$$a=b=c=\ldots=l=1,$$

tous les termes se réduisant à l'unité, le développement se réduit au nombre des termes distincts et l'expression non développée se réduit à p^m.

Cela posé, pour un même système d'indices, on sait passer des permutations rectilignes, formées avec k lettres quelconques prises parmi les p lettres données, aux permutations circulaires de ces mêmes lettres avec les mêmes répétitions et en calculer le nombre. En multipliant ce nombre par

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{i_1!\,i_2!\ldots i_q!},$$

on aura le nombre des permutations circulaires de mêmes indices formées indistinctement avec toutes les lettres données, et enfin en faisant la somme de tous les résultats qui répondent à tous les systèmes distincts d'indices qui vérifient

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m,$$

on aura le nombre total des arrangements circulaires complets.

SECONDE PARTIE.

FORMULES GÉNÉRALES.

9. Soient α, β, ..., λ les indices d'une permutation et D leur plus grand commun diviseur, posons

$$\alpha=\alpha'\mathrm{D},\qquad \beta=\beta'\mathrm{D},\qquad \ldots,\qquad \lambda=\lambda'\mathrm{D},$$

les nombres entiers α', β', ..., λ' sont premiers entre eux. Faisons

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m=m'\mathrm{D}$$

et posons, quel que soit n,

$$\mathrm{P}(n)=\frac{(m'n)!}{(\alpha' n)!(\beta' n)!\ldots(\lambda' n)!}.$$

Nous avons vu dans la première Partie que si d_p est l'un quelconque des diviseurs de D, et si l'on désigne par $\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)$ le nombre des permutations rectilignes d'indices α, β, ..., λ qui peuvent se partager en d_p groupes identiques, et pas plus de $\left(m'\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)$ lettres, on a

$$\sum_1^{\mathrm{D}}\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{D}),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs de D, y compris 1 et D. Plus généralement, si n est l'un quelconque des diviseurs de D, on a

$$(\alpha)\qquad \sum_1^{n}\mathrm{Q}\left(\frac{n}{d_p}\right)=\mathrm{P}(n),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs d_p de D qui sont aussi diviseurs de n, y compris 1 et n.

Le nombre à calculer des permutations circulaires d'indices α, β, ..., λ est

$$\sum_1^{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)}{m_p};$$

or

$$m_p=\frac{m}{d_p},$$

donc cette somme est

$$\frac{1}{m}\sum_1^{\mathrm{D}}\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{D}}{d_p}\right)d_p,$$

étendue à tous les diviseurs d_p de D, y compris 1 et D.

10. Pour la solution de cette question que je généraliserai plus loin, M. C. Jordan a bien voulu m'indiquer tout le parti que je pouvais tirer d'un théorème général de la théorie des nombres, à savoir :

Si l'on désigne par a, b, c, ..., l tous les diviseurs premiers absolus et distincts d'un nombre entier n et si l'on a

$$\sum_{1}^{n} \mathrm{R}(d_p) = \mathrm{S}(n),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs d_p de n, y compris 1 et n, et aussi

$$\sum_{1}^{d} \mathrm{R}(d_q) = \mathrm{S}(d),$$

d étant l'un quelconque des diviseurs de n et d_q l'un quelconque des diviseurs de n qui sont aussi diviseurs de d, on a

$$\mathrm{R}(n) = \mathrm{S}(n) - \sum \mathrm{S}\left(\frac{n}{a}\right) + \sum \mathrm{S}\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum \mathrm{S}\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots,$$

les sommes s'étendant ici aux combinaisons un à un, deux à deux, etc., des nombres a, b, c, ..., l.

Cherchons quelle est la fonction R telle que $\mathrm{S}(n) = n$, on a immédiatement

$$\mathrm{R}(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \ldots$$

ou

$$\mathrm{R}(n) = n\left(1 - \sum \frac{1}{a} + \sum \frac{1}{ab} - \sum \frac{1}{abc} + \ldots\right)$$

ou

$$\mathrm{R}(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

ou enfin

$$\mathrm{R}(n) = \varphi(n),$$

$\varphi(n)$ étant la fonction bien connue qui exprime combien il y a de nombres premiers avec n et moindres que n.

On a donc

$$\sum_{1}^{n} \varphi(d_p) = n$$

et aussi

$$\sum_{1}^{d_p} \varphi(d') = d_p,$$

d' étant l'un quelconque des diviseurs de d_p.

11. Cela posé, le nombre cherché des permutations circulaires peut s'écrire

$$\frac{1}{m} \sum_{1}^{D} \left[Q\left(\frac{D}{d_p}\right) \sum_{1}^{d_p} \varphi(d') \right];$$

d' étant l'un quelconque des diviseurs de d_p et d_p l'un quelconque des diviseurs de D, d' peut prendre toutes les valeurs des diviseurs de D et l'on peut se proposer d'ordonner les termes de cette somme par rapport aux valeurs que peut prendre $\varphi(d')$. Cherchons le groupe des termes correspondant à une valeur déterminée de d'. Le nombre d_p étant un multiple de d', posons

$$d_p = \varepsilon d',$$

ε étant entier, $\frac{D}{d_p}$ qui est entier devient

$$\frac{D}{d'} \frac{1}{\varepsilon},$$

donc ε est un diviseur du nombre entier $\frac{D}{d'}$, que je désignerai par δ'; et, réciproquement, à tout diviseur ε de ce nombre répond un terme contenant $\varphi(d')$ en facteur; la somme de parcils termes est donc

$$\varphi(d') \sum_{1}^{\delta'} Q\left(\frac{\delta'}{\varepsilon}\right)$$

ou, en vertu de l'égalité (α),

$$\varphi(d') P(\delta') \qquad (d'\delta' = D);$$

d'où cette formule très simple, pour le nombre cherché,

$$\frac{1}{m}\sum_{1}^{D} P(\delta)\varphi(d) \qquad (d\delta = D),$$

cette somme étant étendue à tous les diviseurs d de D, y compris 1 et D, en convenant de faire $\varphi(1) = 1$. De là ce théorème :

Théorème. — *Le nombre des permutations circulaires d'objets distincts répétés respectivement* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *fois est*

$$\frac{1}{m}\sum_{1}^{D} P\left(\frac{D}{d}\right)\varphi(d), \qquad \varphi(1) = 1,$$

où $m = \alpha + \beta + \ldots + \lambda$; D *est le plus grand commun diviseur des nombres* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; d *l'un quelconque des diviseurs de* D, *y compris* 1 *et* D. *Le nombre entier* $\varphi(d)$ *est celui qui exprime combien il y a de nombres premiers avec* d, *moindres que* d; *enfin* $P\left(\frac{D}{d}\right)$ *est le nombre des permutations rectilignes des mêmes objets ayant pour indices*

$$\frac{\alpha}{d}, \quad \frac{\beta}{d}, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda}{d}.$$

Il en résulte immédiatement pour les arrangements circulaires complets p à p de m objets distincts le théorème suivant :

Théorème. — *Le nombre des arrangements circulaires complets* p *à* p *de* m *objets distincts est*

$$\frac{1}{m}\,\mathrm{S}\,\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{i_1!\,i_2!\ldots i_q!}\sum_{1}^{n} P\left(\frac{n}{d}\right)\varphi(d), \qquad \varphi(1) = 1.$$

La somme S *s'étendant à tous les systèmes distincts d'indices ou solutions en nombres entiers et positifs de l'équation*

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m,$$

k désigne le nombre des indices non nuls dans un même système, n le plus grand commun diviseur des indices d'une même solution et enfin les nombres $i_1, i_2, \ldots, i_q$, dont la somme est k, expriment combien dans un même système d'indices il y en a de même valeur.

Dans le cas particulier des arrangements circulaires simples, on a

$$k = m, \qquad i_1 = i_2 = \ldots = i_{q-1} = 0, \qquad i_q = m, \qquad n = 1;$$

donc le nombre des arrangements circulaires simples de p lettres m à m est

$$\frac{1}{m} p(p-1)\ldots(p-m+1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{m} A_p^m,$$

A_p^m représentant le nombre des arrangements rectilignes simples. C'est ce qu'il est facile de voir directement.

12. *Généralisations.* — Les questions particulières que nous avions en vue sont complètement résolues, mais je ne crois pas sans intérêt de montrer comment la méthode qui a réussi peut servir à résoudre des questions plus étendues.

Posons en général

$$(\beta) \qquad \sum_1^n Q\left(\frac{n}{d}\right) = P(n).$$

d étant l'un quelconque des diviseurs de n qui est lui-même l'un quelconque des diviseurs de D. Les nombres $Q\left(\frac{D}{d}\right)$ n'ont plus maintenant le sens particulier qu'on leur attribuait plus haut, ils sont seulement assujettis à être déterminés pour chaque valeur de d. Quant aux nombres $P(n)$, ils sont définis par l'égalité précédente (β).

Supposons que l'on veuille calculer

$$\sum_1^D Q\left(\frac{D}{d}\right) d^r,$$

où t est absolument quelconque. La marche à suivre est la même que plus haut; cherchons d'abord Q de façon que

$$\sum_1^n Q\left(\frac{n}{d}\right) = n^t \qquad (d \text{ diviseur de } n).$$

En appliquant le théorème général, on a

$$Q(n) = n^t\left(1 - \frac{1}{a^t}\right)\left(1 - \frac{1}{b^t}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{l^t}\right),$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant tous les diviseurs premiers distincts de n; nous la désignerons par

$$\varphi_t(n).$$

Pour $t = 1$, on retrouve la fonction connue

$$\varphi_1(n) \quad \text{ou} \quad \varphi(n).$$

Pour $t = 0$, on a, quel que soit t et $n \neq 1$,

$$\varphi_0(n) = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots = 0.$$

Mais, pour $n = 1$, il faut convenir que l'on aura toujours

$$\varphi_t(1) = 1,$$

quel que soit t.

Cela posé, en raisonnant comme plus haut, on a

$$(\gamma) \qquad \sum_1^D Q\left(\frac{D}{d}\right) d^t = \sum_1^D P\left(\frac{D}{d}\right) \varphi_t(d).$$

L'arbitraire laissé pour le choix des fonctions Q permet de déduire de cette égalité générale une infinité de relations, nous allons en examiner quelques-unes.

13. Appliquons-la d'abord à trouver des relations entre les fonc-

tions $\varphi_t(n)$. A cet effet, faisons

$$Q\left(\frac{n}{d}\right) = Q\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{n}{d}\right)^{\theta},$$

θ étant quelconque, on a

$$\sum_{1}^{D} Q\left(\frac{D}{d}\right) d^t = \sum_{1}^{D} Q\left(\frac{D}{d}\right) D^{\theta} d^{t-\theta} = D^{\theta} \sum_{1}^{D} Q\left(\frac{D}{d}\right) d^{t-\theta}$$

ou

$$\sum_{1}^{D} Q\left(\frac{D}{d}\right) d^t = D^{\theta} \sum_{1}^{D} P\left(\frac{D}{d}\right) \varphi_{t-\theta}(d).$$

D'autre part, si l'on fait

$$P'(n) = \sum_{1}^{n} Q'\left(\frac{n}{d}\right),$$

on a aussi

$$\sum_{1}^{D} Q\left(\frac{D}{d}\right) d^t = \sum_{1}^{D} P'\left(\frac{D}{d}\right) \varphi_t(d) = D^{\theta} \sum_{1}^{D} P\left(\frac{D}{d}\right) \varphi_{t-\theta}(d)$$

ou

$$\sum_{1}^{D} P'(\delta)\, \varphi_t(d) = D^{\theta} \sum_{1}^{D} P(\delta)\, \varphi_{t-\theta}(d) \qquad (d\delta = D).$$

Mais on a aussi

$$P'(\delta) = \sum_{1}^{\delta} Q'\left(\frac{\delta}{d'}\right) \qquad (d' \text{ diviseur de } \delta, \text{ qui est diviseur de D})$$

ou

$$P'(\delta) = \sum_{1}^{\delta} Q\left(\frac{\delta}{d'}\right)\left(\frac{\delta}{d'}\right)^{\theta} = \delta^{\theta} \sum_{1}^{\delta} Q\left(\frac{\delta}{d'}\right) d'^{-\theta}$$

ou, en vertu de (γ),

$$P'(\delta) = \delta^{\theta} \sum_{1}^{\delta} P\left(\frac{\delta}{d'}\right) \varphi_{-\theta}(d').$$

On a donc l'égalité fondamentale

$$D^\theta \sum_1^D P(\delta)\varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^D \left[\delta_1^\theta \sum_1^D P(\delta')\varphi_{-\theta}(d')\right]\varphi_t(d_1)$$

$$(d\delta = d_1\delta_1 = D \quad \text{et} \quad d'\delta' = \delta_1).$$

Ordonnons le second membre par rapport aux valeurs de $P(\delta')$ lorsque δ' prend toutes les valeurs des diviseurs de D; si l'on fait

$$\delta' = \delta, \qquad \delta_1 = d'\delta,$$

on a

$$d_1 = \frac{D}{\delta}\frac{1}{d'} = \frac{d}{d'};$$

donc d' est un diviseur de d et réciproquement à tout diviseur d' de d répond dans le second membre au terme en $P(\delta)$ et l'on a

$$D^\theta \sum_1^D P(\delta)\varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^D \left[P(\delta)\sum_1^D \delta^\theta d'^\theta \varphi_{-\theta}(d')\varphi_t\left(\frac{d}{d'}\right)\right].$$

Cette égalité ayant lieu non seulement pour D mais pour tous les diviseurs, on en conclut

$$D^\theta \varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^d \delta^\theta d'^\theta \varphi_{-\theta}(d')\varphi_t\left(\frac{d}{d'}\right) \qquad (d' \text{ diviseur de } d)$$

ou

$$\varphi_{t-\theta}(d) = \sum_1^d \left(\frac{d'}{d}\right)^\theta \varphi_{-\theta}(d')\varphi_t\left(\frac{d}{d'}\right).$$

Mais $\frac{d}{d'}$ est aussi l'un quelconque des diviseurs de d : donc enfin

$$\varphi_{t-\theta}(n) = \sum_1^n \varepsilon^{-\theta}\varphi_t(\varepsilon)\varphi_{-\theta}\left(\frac{n}{\varepsilon}\right),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs ε du nombre entier n, y compris 1 et n.

Les indices t et θ sont quelconques, mais il faut se rappeler que, pour $t = 0$ ou $\theta = 0$, $\varphi_0(\varepsilon)$ est nul, sauf pour $\varepsilon = 1$ auquel cas il est égal à 1.

Si l'on fait $\theta = -1$, on a

$$\varphi_{t+1}(n) = \sum_1^n \varepsilon\varphi_t(\varepsilon)\varphi\left(\frac{n}{\varepsilon}\right).$$

D'où l'on voit que l'on peut exprimer φ_t au moyen de sommes ne dépendant que de φ_1 si t est un entier quelconque.

14. Comme seconde application, faisons

$$Q\left(\frac{n}{d}\right) = 1 \qquad \text{(quel que soit } d\text{, diviseur de } n \text{ diviseur de D)};$$

alors

$$P(n) = N(n),$$

en désignant ainsi le nombre des diviseurs de n : donc

$$\sum_1^D Q\left(\frac{D}{d}\right)d^t = \sum_1^D N(\delta)\varphi_t(d) \qquad (d\delta = D)$$

ou

$$\sum_1^D d^t = \sum_1^D N(\delta)\varphi_t(d).$$

Le premier membre est la somme des puissances $t^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de D, elle s'exprime au moyen des nombres N et φ_t.

En particulier, si $t = 1$,

$$\sum_1^D d = \sum_1^D N(\delta)\varphi(d).$$

Faisons, en particulier, $D = a^\alpha$, a étant premier absolu et α entier,

on a $d = a^{\alpha'}$, α' ayant toutes les valeurs 0, 1, 2, ..., α : donc

$$\sum_{1}^{D} a^{\alpha'} = 1 + a + \ldots + a^{\alpha} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

$$\varphi(a^{\alpha'}) = a^{\alpha'}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

et

$$N(\delta) = N(a^{\alpha-\alpha'}) = (\alpha - \alpha' + 1),$$

sauf pour $\alpha' = 0$; donc

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} = \alpha + 1 + \sum_{\alpha'=1}^{\alpha=\alpha} (\alpha + 1 - \alpha')\, a^{\alpha'}\left(1 - \frac{1}{a}\right);$$

elle a lieu quels que soient le nombre premier a et l'entier α : donc elle subsiste quels que soient les nombres a et α; c'est une identité algébrique.

15. On peut ainsi déduire des formules générales de sommation exposées plus haut une infinité d'identités; j'observe même que les formules établies jusqu'ici en considérant les diviseurs d'un entier D subsistent si l'on considère un polynôme quelconque entier en x; seulement il faut, pour préciser, convenir de réduire toujours à $+1$ le coefficient du terme de plus haut degré, non seulement dans ce polynôme, mais dans tous ses diviseurs. Il résulte alors des formules données plus haut une infinité de formules de transformations algébriques; les fonctions φ n'ont plus maintenant la même signification qu'en Arithmétique, mais leur forme subsiste.



Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles;

PAR M. LUCIEN **LÉVY**.

La recherche des systèmes triplement orthogonaux a été ramenée, par M. Maurice Lévy, à l'intégration de l'équation du troisième ordre

$$A\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Les lettres ont la signification suivante : si $\varphi(x, y, z, u) = 0$ est l'équation de la surface et si l'on désigne, suivant l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles du premier et du second ordre de z par rapport à x,

$$\begin{aligned} A &= (1+q^2)s - pqt,\\ B &= (1+p^2)t - (1+q^2)r,\\ C &= \qquad pqr - (1+p^2)s. \end{aligned}$$

Lorsque u varie, la surface engendre une des trois familles du système triplement orthogonal, ou, pour parler plus brièvement, une *famille de Lamé*. Soit dn l'élément de normale comprise entre deux surfaces qui correspondent aux valeurs u et $u + du$ du paramètre, la fonction H est définie par l'égalité

$$H = \frac{dn}{du},$$

et, comme du dépend des dérivées du premier ordre, l'équation (1) est bien du troisième ordre. L'intérêt de cette équation consiste dans la condensation énorme des termes qui contiennent une des trois variables.

M. Darboux, dans un Mémoire publié en 1878 dans les *Annales de l'École Normale*, a mis cette équation sous une forme avantageuse dans certains cas, en supposant la surface rapportée, non plus à des axes fixes, mais à des axes entraînés avec elle. Si l'on appelle a, b, c les composantes de la translation, α, β, γ celles de la rotation du mouvement d'entraînement, et si l'on pose

$$k = \frac{\partial z}{\partial u} + c - ap - bq + \alpha(y + qz) - \beta(x + pz) + \gamma(py - qx),$$

la fonction H, qui figure dans l'équation (1), encore exacte en supposant les axes mobiles, devient

$$H = \frac{k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Soit alors

$$\Delta(\mu) = A\,\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + B\,\frac{d^2}{dx\,dy}\,\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + C\,\frac{d^2}{dy^2}\,\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

l'équation (1) s'écrit avec les nouveaux axes

$$\Delta(k) = 0,$$

ou, en développant, comme a, b, c, α, β, γ ne dépendent que de u,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + c\Delta(1) - a\Delta(p) - b\Delta(q) \\ &\qquad + \alpha\Delta(y + qz) - \beta\Delta(x + pz) + \gamma\Delta(py - qx) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si la surface conserve une forme invariable, z sera indépendant de u, et toute solution de l'équation (2) donnera, ainsi que M. Darboux l'a fait observer, une surface de forme invariable, qui, par un mouvement convenablement réglé, engendrera une famille de Lamé. On peut se proposer de rechercher des surfaces jouissant de cette pro-

priété. Voici, à cet égard, ce qui a été déjà fait. Dans le Mémoire déjà cité, M. Darboux montre que, si une surface satisfait à la condition indiquée pour un seul mouvement, ce mouvement est hélicoïdal et il indique des hélicoïdes comme solutions. D'autre part, j'ai montré (*Bulletin des Sciences mathématiques*, mars 1891) que les sphères et les plans sont les seules surfaces réelles de forme invariable qui engendrent une famille de Lamé, quelque déplacement qu'on leur imprime; et même ce sont les seules, réelles ou imaginaires, si, comme il va de soi, le système triplement orthogonal doit être composé de trois familles *distinctes*. Enfin, le 22 juin 1891, M. Petot a fait connaître, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, un très intéressant théorème sur les surfaces susceptibles d'engendrer par translation une famille de Lamé, et il en a déduit des conséquences que j'avais énoncées de mon côté à la Société mathématique et à la Société philomathique. M. Petot annonce à la fin de sa Note qu'il possède les surfaces dont la représentation sphérique se compose d'ellipses homofocales ou de cercles pour les deux familles; mais, à ma connaissance, il n'a rien publié sur ce sujet. D'ailleurs, je n'ai pas eu à utiliser son théorème, la méthode que j'ai suivie dans mes recherches étant tout à fait différente.

Dans le présent Mémoire, je donnerai un certain nombre de surfaces qui, par translation, peuvent engendrer une famille de Lamé, et je ferai connaître quelques propriétés de ces surfaces. Pour simplifier les calculs, je supposerai la translation parallèle à l'axe des z, ce qui entraîne

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

et l'équation (2) se réduit à la suivante

$$\Delta(1) = 0, \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{B}\frac{d^2}{dx\,dy}\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{C}\frac{d^2}{dy^2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit d'intégrer : une des difficultés du

calcul consiste dans la formation des coefficients A, B, C. Si donc on peut les connaître d'avance, on aura triomphé d'un gros obstacle. Or les lignes de courbure d'une surface quelconque se projetant, sur le plan des xy, suivant des lignes qui ont pour équation différentielle

$$(4)\qquad C\,dx^2 - B\,dx\,dy + A\,dy^2 = 0,$$

un premier procédé de recherche consistera donc à essayer des surfaces pour lesquelles cette équation se forme aisément. Par exemple, les lignes de courbure des surfaces de révolution, autour de Oz, ont pour équation

$$xy\,dx^2 + (y^2 - x^2)\,dx\,dy - xy\,dy^2 = 0.$$

On pourra donc prendre, en supprimant un facteur commun à A, B, C,

$$A = -xy,$$
$$B = x^2 - y^2,$$
$$C = xy.$$

Or soit

$$z = \varphi(x^2 + y^2) = \varphi(\rho)$$

l'équation d'une pareille surface : on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 2x\varphi'(\rho), \qquad q = 2y\,\varphi'(\rho),$$

en désignant par des accents les dérivées des fonctions d'une variable,

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\rho\,\varphi'(\rho)}} = f(\rho),$$
$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2xf'(\rho), \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 2yf'(\rho),$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 2f'(\rho) + 4x^2 f''(\rho),$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = 4xy\,f''(\rho),$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 2f'(\rho) + 4y^2 f''(\rho).$$

Donc l'équation (3) est identiquement vérifiée et les surfaces de révolution en sont une solution. C'était d'ailleurs une solution évidente : car faisons glisser dans son plan une section méridienne le long de l'axe de révolution et considérons les trajectoires orthogonales de cette section ; ces trajectoires se déduisent toutes de l'une d'entre elles, sauf l'axe des z, par une translation parallèle à Oz. Faisons tourner toute la figure autour de Oz : nous aurons deux familles de surfaces de révolution, de forme invariable dans une même famille, et orthogonales entre elles. Le système triplement orthogonal est complété par les plans méridiens : ce système est bien connu.

Le succès de la vérification précédente a tenu à ce que z et H s'exprimaient en fonction d'une seule variable, en d'autres termes, H était fonction de z. Il est facile de voir que la vérification réussit même si H est fonction arbitraire de z. La propriété géométrique des nouvelles surfaces consiste en ce que tout plan perpendiculaire à Oz les coupe sous un angle constant : ce sont donc des surfaces à lignes de courbure planes situées dans des plans parallèles que nous allons trouver.

Soit

$$\mathrm{H} = f(z).$$

Il s'ensuit

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = p f'(z), \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = q f'(z),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2} = p^2 f'' + r f', \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x\, \partial y} = pq f'' + s f', \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2} = q^2 f'' + t f',$$

$$\Delta(1) = (\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}pq + \mathrm{C}q^2) f'' + (\mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t) f'.$$

Or on sait que, dans toute surface

$$\mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{C}t = 0,$$

l'équation (3) se réduit donc à la suivante, en supprimant le facteur f'' qui ne donne que des cylindres,

$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}pq + \mathrm{C}q^2 = 0$$

ou

$$(p^2 - q^2)s - pqr + pqt = 0, \tag{5}$$

ce qui est bien l'équation différentielle des surfaces-moulures de Monge (*Analyse appliquée à la Géométrie*, 1re édition, n° 23).

L'intégrale générale de cette équation s'obtient en éliminant φ entre les deux équations

$$(6)\qquad \begin{cases} F(z) = \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi + G(\varphi), \\ \quad o = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + G'(\varphi), \end{cases}$$

dont la seconde est la dérivée de la première par rapport à φ. Ces équations contiennent deux fonctions arbitraires, F et G.

Il est à remarquer que les surfaces que nous venons d'obtenir ne font pas partie de systèmes triplement orthogonaux nouveaux : on sait, en effet, que les deux familles de surfaces engendrées par les lignes d'un réseau plan orthogonal lorsque le plan roule sur une surface développable quelconque forment, avec la famille que constituent les différentes positions du plan, un système triplement orthogonal. Si, en particulier, on suppose le réseau plan obtenu par la translation d'une courbe et par les trajectoires orthogonales et qu'on fasse rouler le plan sur un cylindre, on aura le système précédemment trouvé.

Je vais profiter des deux fonctions arbitraires de la solution pour assujettir les surfaces trouvées à décrire une famille de Lamé par un mouvement de rotation autour de Oz. En composant ce mouvement avec une translation parallèle à Oz, on aura un mouvement plus général dans lequel la surface engendrera une famille de Lamé. La surface est déterminée par les équations (6) : il s'agit de former les quantités p, q, r, s, t et H. J'aurai pour cela besoin de calculer $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; je désignerai, pour abréger l'écriture, par F, F′, F″, F‴ la fonction F(z) et ses dérivées par rapport à z, par G, G′, G″, G‴ la fonction G(φ) et ses dérivées par rapport à φ.

La première équation (6) donne, par différentiation et en tenant compte de la seconde

$$F'\,dz = \cos\varphi\,dx + \sin\varphi\,dy,$$

d'où

$$p = \frac{\cos\varphi}{F'}, \qquad q = \frac{\sin\varphi}{F'}.$$

et

$$py - qx = \frac{y\cos\varphi - x\sin\varphi}{F'} = -\frac{G'}{F'},$$

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{F'^2}, \qquad H = \frac{qx - py}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{G'}{1 + F'^2}.$$

La seconde équation (6) donne ensuite

$$0 = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy + (G'' - x\cos\varphi - y\sin\varphi)\, d\varphi$$

ou, en tenant compte de la première,

$$0 = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy + (G'' + G - F)\, d\varphi.$$

Posons

$$P = G'' + G - F,$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi}{P}, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{\cos\varphi}{P};$$

par suite,

$$r = \frac{dp}{dx} = -\frac{\sin^2\varphi\, F'^2 + \cos^2\varphi\, F''P}{PF'^3} = -\frac{F'^2 - \cos^2\varphi(F'^2 - F''P)}{PF'^3},$$

$$s = \frac{dp}{dy} = \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{F'^2 - F''P}{PF'^3},$$

$$t = \frac{dq}{dy} = -\frac{\cos^2\varphi\, F'^2 + \sin^2\varphi\, F''P}{PF'_3} = -\frac{F'^2 - \sin^2\varphi(F'^2 - F''P)}{PF'^3}.$$

L'équation

$$\Delta(qx - py) = 0$$

est ici

$$A\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + B\,\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

parce que, la surface étant une surface-moulure de Monge, on a

$$A + C = 0.$$

Calcul de A :

$$A = (1 + q^2)s - pqt,$$

$$A = \frac{F'^2 + \sin^2\varphi}{F'^2} \sin\varphi\cos\varphi \frac{F'^2 - F''P}{PF'^2} + \sin\varphi\cos\varphi \frac{1}{F'^2} \frac{F'^2 - \sin^2\varphi(F'^2 - F''P)}{PF'^3},$$

$$A = \sin\varphi\cos\varphi \frac{F'^2 - F''P + 1}{PF'^3}.$$

Je poserai

$$m = \frac{F'^2 - F''P + 1}{PF'^3},$$

d'où

$$A = m \sin\varphi\cos\varphi.$$

Calcul de B :

$$B = (1 + p^2)t - (1 + q^2)r,$$

$$B = -\frac{F'^2 + \cos^2\varphi}{F'^2} \frac{F'^2 - \sin^2\varphi(F'^2 - F''P)}{PF'^3}$$

$$+ \frac{F'^2 + \sin^2\varphi}{F'^2} \frac{F'^2 - \cos^2\varphi(F'^2 - F''P)}{PF'^3},$$

$$B = -\cos 2\varphi \frac{F'^2 - F''P + 1}{PF'^3},$$

$$B = -m\cos 2\varphi.$$

Remarque. — Ces valeurs si simples auraient pu être obtenues en observant que les équations

$$\begin{aligned} x\cos\varphi + y\sin\varphi + G(\varphi) - F(h) &= 0, \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi + G'(\varphi) \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

représentent les projections sur xOy des tangentes à deux lignes de courbure. L'équation différentielle de ces lignes est donc

$$\sin\varphi\cos\varphi\, dx^2 - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, dx\, dy - \sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

on retrouve ainsi les valeurs de A, B, C.

Calcul de $\frac{\partial H}{\partial x}$. — On a

$$H = \frac{G'}{\sqrt{1 + F'^2}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{G'' \sin\varphi}{P\sqrt{1 + F'^2}} - \frac{G' F'' \cos\varphi}{(1 + F'^2)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\sin\varphi\, G''(1 + F'^2) - P G' F'' \cos\varphi}{P(1 + F'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcul de $\frac{\partial H}{\partial y}$:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{G'' \cos\varphi}{P\sqrt{1 + F'^2}} - \frac{G' F'' \sin\varphi}{(1 + F'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{G''(1 + F'^2)\cos\varphi + P G' F'' \sin\varphi}{P(1 + F'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcul de $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$. — Posons

$$L = G''(1 + F'^2)\sin\varphi - P G' F'' \cos\varphi,$$

$$N = P\ (1 + F'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{N\frac{\partial L}{\partial x} - L\frac{\partial N}{\partial x}}{N^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = G'''(1 + F'^2)\frac{\sin^2\varphi}{P} + F'' G'' \sin\varphi\cos\varphi + G''(1 + F'^2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P}$$
$$- \frac{(G''' + G')G' F'' \cos\varphi\sin\varphi}{P} + G' F'' \cos^2\varphi + G' F'' \sin^2\varphi - P G' F''' \frac{\cos^2\varphi}{F'},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{G' + G'''}{P}(1 + F'^2)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi - (1 + F'^2)^{\frac{3}{2}}\cos\varphi + 3PF''(1 + F'^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi$$
$$= (1 + F'^2)^{\frac{1}{2}}\left[(G' + G''')(1 + F'^2)\frac{\sin\varphi}{P} - (1 + F'^2)\cos\varphi + 3PF''\cos\varphi\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial x}-L\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(1+F'^2)^{\frac12}} = (1+F'^2)\Big[& G'''(1+F'^2)\sin^2\varphi + PF''G''\sin\varphi\cos\varphi + G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi \\ & - (G'''+G')G'F''\sin\varphi\cos\varphi + PG'F''\cos^2\varphi + PG'F''\sin^2\varphi \\ & - P^2G'F'''\frac{\cos^2\varphi}{F'} - (G'+G''')G''(1+F'^2)\frac{\sin^2\varphi}{P} \\ & + (G'+G''')G'F''\sin\varphi\cos\varphi \\ & + G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi - PG'F''\cos^2\varphi - 3PF''G''\sin\varphi\cos\varphi\Big] \\ & + 3P^2G'F''^2\cos^2\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial x}-L\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(1+F'^2)^{\frac12}} = (1+F'^2) & \\ \times\Big\{ & [2G''(1+F'^2) - 2PF''G'']\sin\varphi\cos\varphi \\ & + \Big[G'''(1+F'^2) + PG'F'' - \frac{(G'+G''')G''(1+F'^2)}{P}\Big]\sin^2\varphi - \frac{P^2G'F'''}{F'}\cos^2\varphi\Big\} \\ + 3P^2G'F''^2\cos^2\varphi, &\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = P^{-2}(1+F'^2)^{-\frac32}\,\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial x}-L\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(1+F'^2)^{\frac12}}.$$

Calcul de $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = \frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y}-L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{N^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} = & -G'''(1+F'^2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P} + 2G''F''\sin^2\varphi - G''(1+F'^2)\frac{\cos^2\varphi}{P} \\ & + \frac{(G'+G''')+G'F''\cos^2\varphi}{P} + G''F''\cos^2\varphi - PG'F'''\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{F'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial y} & = -\frac{(G'+G''')(1+F'^2)^{\frac32}\cos\varphi}{P} - (1+F'^2)^{\frac32}\sin\varphi + 3P(1+F'^2)^{\frac12}F''\sin\varphi \\ & = (1+F'^2)^{\frac12}\Big[-(G'+G''')(1+F'^2)\frac{\cos\varphi}{P} - (1+F'^2)\sin\varphi + 3PF''\sin\varphi\Big],\end{aligned}$$

$$\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+F'^2)\Big[-G'''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi + 2PG''F''\sin^2\varphi$$

$$- G''(1+F'^2)\cos^2\varphi + (G'+G''')G'F''\cos^2\varphi$$

$$+ PG''F''\cos^2\varphi - P^2G'F'''\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P}$$

$$+ G''(G'+G''')(1+F'^2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{F'} + G''(1+F'^2)\sin^2\varphi$$

$$- 3PF''G''\sin^2\varphi - F''G'(G'+G''')\cos^2\varphi - PG'F''\sin\varphi\cos\varphi\Big]$$

$$+ 3P^2G'F''^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

$$\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+F'^2)$$

$$\times \Big\{[PF''G'' - G''(1+F'^2)]\cos 2\varphi$$

$$+ \Big[-G'''(1+F'^2) - \frac{P^2G'F'''}{F'} + \frac{(G'+G''')(1+F'^2)G''}{P} - PF''G'\Big]\sin\varphi\cos\varphi\Big\}$$

$$+ 3P^2G'F''^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = P^{-2}(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Calcul de $\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$. — Posons

$$M = G''(1+F'^2)\cos\varphi + PG'F''\sin\varphi,$$

on a toujours

$$N = P(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

On aura donc

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{N\dfrac{\partial M}{\partial y} - M\dfrac{\partial N}{\partial y}}{N^2},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{G'''(1+F'^2)\cos^2\varphi}{P} + F''G''\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi}{P}$$

$$- \frac{(G'+G'')G'F''\sin\varphi\cos\varphi}{P} - G'F''\sin^2\varphi + \frac{PG'F'''\sin^2\varphi}{F'} - G'F''\cos^2\varphi,$$

$$\begin{aligned}\frac{N\dfrac{\partial M}{\partial y} - M\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+F'^2)\Big| & -G'''(1+F'^2)\cos^2\varphi + PF''G''\sin\varphi\cos\varphi \\ & + G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi - (G'+G''')G'F''\sin\varphi\cos\varphi \\ & - PG'F''\sin^2\varphi + \frac{P^2G'F'''\sin^2\varphi}{F'} - PG'F''\cos^2\varphi \\ & + (G'+G''')(1+F'^2)\frac{G''\cos^2\varphi}{P} + (1+F'^2)G''\cos\varphi\sin\varphi \\ & - 3PF''G''\sin\varphi\cos\varphi + G'F''(G'+G''')\sin\varphi\cos\varphi + PG'F''\sin^2\varphi\Big| \\ - 3P^2G'F''^2\sin^2\varphi & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & (1+F'^2) \\ & \times\Big\{\big[2G'''(1+F'^2) - 2PF''G''\big]\sin\varphi\cos\varphi \\ & \quad + \left[-G'''(1+F'^2) - PG'F'' + \frac{(G'+G''')(1+F'^2)G''}{P}\right]\cos^2\varphi + \frac{P^2G'F'''\sin^2\varphi}{F'}\Big\} \\ & - 3P^2G'F''^2\sin^2\varphi,\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = P^{-2}(1+F'^2)^{-\frac{3}{2}}\,\frac{N\dfrac{\partial M}{\partial y} - M\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Calcul de $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$. — Je désignerai le facteur $P^{-2}(1+F'^2)^{-\frac{3}{2}}$ par n.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) = {} & (1+F'^2) \\ & \times\Big\{4G''(1+F'^2 - PF'')\sin\varphi\cos\varphi \\ & \quad + \left[\frac{(G'+G''')(1+F'^2)G''}{P} - G'''(1+F'^2) - PG'F'' - \frac{P^2G'F'''}{F'}\right]\cos 2\varphi\Big\} \\ & + 3P^2G'F''^2\cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Il est maintenant facile de former l'équation

$$\Delta(qx - py) = 0, \qquad \text{ou} \qquad A\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + B\,\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

En supprimant les facteurs m et n, et remarquant que $1 + F'^2$ a tou-

jours été supposé différent de zéro, il vient

$$G''(1 + F'^2 - PF'') = 0,$$

qui se décompose en deux,

$$G'' = 0$$

et

$$1 + F'^2 - (G'' + G - F)F'' = 0,$$

d'où

$$\frac{1 + F'^2 + FF''}{F''} = G'' + G.$$

Occupons-nous d'abord de la seconde équation. Les deux membres sont fonctions de variables distinctes : ils doivent donc être égaux chacun à une constante a, d'où deux équations différentielles ordinaires à intégrer

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + G = a,$$

$$1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = a\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

La première a pour intégrale

$$G(\varphi) = a + C\cos\varphi + C'\sin\varphi,$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

La seconde donne

$$F(z) = a + \sqrt{D - (z + C'')^2},$$

D et C″ étant deux nouvelles constantes arbitraires ; la surface correspondante sera

$$\begin{cases} \sqrt{D - (z + C'')^2} = (x + C)\cos\varphi + (y + C')\sin\varphi, \\ \phantom{\sqrt{D - (z + C'')^2}} 0 = -(x + C)\sin\varphi + (y + C')\cos\varphi. \end{cases}$$

En élevant au carré les deux membres de chaque équation et ajoutant membre à membre, il vient

$$(x + C)^2 + (y + C')^2 + (z + C'')^2 = D.$$

On trouve une sphère quelconque, ce qui n'apprend rien de nouveau.

Examinons alors les solutions données par l'équation

$$G'' = 0.$$

On en tire

$$G(\varphi) = a\varphi + b,$$

a et b étant deux constantes arbitraires. L'équation de la surface correspondante s'obtiendra en éliminant φ entre les deux équations

$$\begin{cases} F(z) = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a\varphi, \\ 0 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + a. \end{cases}$$

Nous avons fait entrer b dans la fonction $F(z)$. Il reste ainsi une fonction arbitraire $F(z)$ et une constante arbitraire a.

La section de la surface par un plan quelconque parallèle au plan des xy est une développante de cercle et toutes ces développantes sont égales entre elles. On peut alors concevoir assez facilement la forme de ces surfaces.

Soit un cylindre de révolution : dans le plan de la base, je trace une développante du cercle de base partant d'un point O de la circonférence de ce cercle, et sur le cylindre une courbe quelconque (C) partant également de O. Si maintenant je déplace le plan de la base du cylindre parallèlement à lui-même, de manière que le point O décrive la courbe (C), la développante de cercle engendrera la surface en question.

En d'autres termes, nous avons démontré le théorème suivant :

Si une surface-moulure de Monge est engendrée par un profil dont le plan reste tangent à un cylindre de révolution et dont un point marqué parcourt une développante du cercle de base de ce cylindre, la surface-moulure engendrera une famille de Lamé dans tout déplacement pour lequel le plan du profil restera tangent au cylindre de révolution, par exemple dans tout mouvement hélicoïdal ayant pour axe l'axe du cylindre.

Remarque. — Ce théorème fournit une solution avec une fonction arbitraire de l'équation qui correspond au mouvement hélicoïdal

$$\Delta(py - qx + k) = 0.$$

où k est une constante.

Le système triplement orthogonal se complète comme précédemment par des surfaces analogues et par des plans.

Une généralisation naturelle nous conduirait maintenant à étudier les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes; mais, M. Petot ayant annoncé, dans la Note déjà citée, qu'il avait déterminé celles de ces surfaces qui engendrent une famille de Lamé par translation, j'ai préféré diriger mes recherches d'un autre côté et aborder immédiatement les surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un seul système.

Les plus simples parmi ces surfaces sont les enveloppes de sphères ou, pour employer une expression proposée par M. Lecornu, les périsphères. Je vais chercher à déterminer celles de ces surfaces qui satisfont à l'équation

$$\Delta(1) = 0.$$

Les surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système sont définies par les deux équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0,\\ &a'(x-a) + b'(y-b) + c'(z-c) + RR' = 0,\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles a, b, c, R sont des fonctions d'un paramètre arbitraire λ à éliminer, a', b', c', R' les dérivées de ces fonctions par rapport à λ.

Nous aurons, comme précédemment, à calculer les fonctions p, q, r, s, t et H. Pour cela nous aurons à différentier totalement les deux équations (7); nous appellerons a'', b'', c'', R'' les dérivées secondes de a, b, c, R par rapport à λ; enfin nous introduirons, pour simplifier l'écriture, une fonction auxiliaire D définie par l'égalité suivante

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} D = {} & a''(x-a) + b''(y-b)\\ & + c''(z-c) - a'^2 - b'^2 - c'^2 + R'^2 + RR''.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, la première équation (7) différentiée donne, en tenant compte de la seconde,

$$(x-a)\,dx+(y-b)\,dy+(z-c)\,dz=0;$$

d'où

$$p=\frac{x-a}{c-z},\qquad q=\frac{y-b}{c-z}.$$

La deuxième équation (7) donne ensuite

$$a'\,dx+b'\,dy+c'(p\,dx+q\,dy)+\mathrm{D}\,d\lambda=0;$$

d'où

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=-\frac{a'+pc'}{\mathrm{D}},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=-\frac{b'+qc'}{\mathrm{D}}.$$

Posons encore

(9) $$\mathrm{A}_1=a'+pc',\qquad \mathrm{B}_1=b'+qc',$$

nous aurons

(10) $$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{D}},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=-\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{D}}.$$

Calculons maintenant r, s, t :

$$r=\frac{dp}{dx}=\frac{1}{c-z}+\frac{(x-a)^2}{(c-z)^3}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

ou

$$r=\frac{(x-a)^2+(c-z)^2}{(c-z)^3}-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{D}}\frac{\partial p}{\partial\lambda}.$$

Or

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda}=\frac{-a'}{c-z}-\frac{c'(x-a)}{(c-z)^2}=-\frac{\mathrm{A}_1}{c-z}.$$

Donc

$$r=\frac{1+p^2}{c-z}+\frac{\mathrm{A}_1^2}{\mathrm{D}(c-z)}.$$

De même

$$\frac{\partial q}{\partial\lambda}=-\frac{\mathrm{B}_1}{c-z},$$

$$s=\frac{(x-a)(y-b)}{(c-z)^3}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}$$

ou

$$s = \frac{pq}{c-z} + \frac{A_1 B_1}{D(c-z)},$$

$$t = \frac{1}{c-z} + \frac{(y-b)^2}{(c-z)^3} + \frac{\partial q}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

ou

$$t = \frac{1+q^2}{c-z} + \frac{B_1^2}{D(c-z)}.$$

On aura, pour les coefficients de l'équation (1), les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
A &= (1+q^2)s - pqt \\
&= (1+q^2)\left[\frac{pq}{c-z} + \frac{A_1 B_1}{D(c-z)}\right] - pq\left[\frac{1+q^2}{c-z} + \frac{B_1^2}{D(c-z)}\right] \\
&= \frac{B_1}{D(c-z)}[A_1(1+q^2) - B_1 pq], \\
B &= (1+p^2)t - (1+q^2)r \\
&= (1+p^2)\left[\frac{1+q^2}{c-z} + \frac{B_1^2}{D(c-z)}\right] - (1+q^2)\left[\frac{1+p^2}{c-z} + \frac{A_1 B^2}{D(c-z)}\right] \\
&= \frac{1}{D(c-z)}[(1+p^2)B_1^2 - (1+q^2)A_1^2], \\
C &= pqr - (1+p^2)s \\
&= pq\left[\frac{1+p^2}{c-z} + \frac{A_1^2}{D(c-z)}\right] - (1+p^2)\left[\frac{pq}{c-z} + \frac{A_1 B_1}{D(c-z)}\right] \\
&= \frac{A_1}{D(c-z)}[A_1 pq - B_1(1+p^2)].
\end{aligned}$$

Calculons maintenant H et ses dérivées :

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)+(z-c)^2}} = \frac{z-c}{R},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p}{R} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{p}{R} - \frac{A_1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{q}{R} - \frac{B_1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{c'}{R} - \frac{(z-c)R'}{R^2}.$$

Les dérivées de A_1 et B_1 par rapport à x ou y introduiront deux quantités

$$A_2 = a'' + pc'', \qquad B_2 = b'' + qc'',$$

en sorte que

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = rc' + A_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

et de même pour les autres dérivées.

On aura donc

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{r}{R} - \frac{pR'}{R^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}\left(rc' + A_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{A_1}{D^2}\left(A_1 + \frac{\partial D}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \frac{A_1}{D}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{A_1}{D}\frac{pR'}{R^2}$$

ou

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \left(\frac{1}{R} - \frac{c'}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right) r + \frac{2A_1}{D}\frac{pR'}{R^2}$$
$$+ \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial \lambda} 2A_1 A_2 - \frac{A_1^2}{D^3}\frac{\partial D}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{A_1^2}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2},$$

$$\frac{d^2 H}{dx\,dy} = \frac{s}{R} - \frac{pR'}{R^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}\left(sc' + A_2 \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{A_1}{D^2}\left(B_2 + \frac{\partial D}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \frac{A_1}{D}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{A_1}{D}\frac{qR'}{R^2}$$
$$= \left(\frac{1}{R} - \frac{c'}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right) s + \frac{R'}{R^2}(A_1 q + B_1 p)$$
$$+ \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial \lambda}(A_2 B_1 + A_1 B_2) - \frac{A_1 B_1}{D^3}\frac{\partial D}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{B_1 A_1}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2},$$

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = \frac{t}{R} - \frac{qR'}{R^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}\left(tc' + B_2 \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{B_1}{D^2}\left(B_2 + \frac{\partial D}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \frac{B_1}{D}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{B_1}{D}\frac{qR'}{R^2}$$
$$= \left(\frac{1}{R} - \frac{c'}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right) t + \frac{2B_1 q R'}{R^2}$$
$$+ \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial \lambda} 2B_1 B_2 - \frac{B_1^2}{D^3}\frac{\partial D}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{B_1^2}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2}.$$

Nous pouvons alors former la quantité

$$\Delta(1) = A\frac{d^2 H}{dx^2} + B\frac{d^2 H}{dx\,dy} + C\frac{d^2 H}{dy^2};$$

si nous remarquons que l'on a identiquement

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

nous pourrons écrire

$$\Delta(1) = \frac{R'}{R^2 D}[2AA_1 p + (A_1 q + B_1 p)B + 2CB_1 q]$$
$$+ \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial \lambda}[2AA_1 A_2 + (A_2 B_1 + B_2 A_1)B + 2CB_1 B_2]$$
$$+ \left(\frac{1}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} - \frac{1}{D^3}[AA_1^2 + BA_1 B_1 + CB_1^2]\right).$$

Le dernier crochet devient, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs,

$$\frac{1}{D(c-z)}[B_1 A_1^3(1+q^2) - A_1^2 B_1^2 pq$$
$$+ A_1 B_1^3(1+p^2) - A_1^3 B_1(1+q^2)$$
$$+ A_1^2 B_1^2 pq - A_1 B_1^3(1+p^2)].$$

Il est donc nul identiquement.

Le premier crochet s'écrit

$$(2AA_1 + BB_1)p + (A_1 B + 2B_1 C)q.$$

Le second

$$(2AA_1 + BB_1)A_2 + (A_1 B + 2B_1 C)B_2.$$

Nous avons donc à calculer

$$2AA_1 + BB_1$$
$$= \frac{1}{D(c-z)}[2A_1^2 B_1(1+q^2) - 2A_1 B_1^2 pq + B_1^3(1+p^2) - B_1 A_1^2(1+q^2)]$$
$$= \frac{B_1}{D(c-z)}[(A_1 q - B_1 p)^2 + A_1^2 + B_1^2]$$
$$= \frac{B_1}{D(c-z)}[(a'q - b'p)^2 + A_1^2 + B_1^2]$$

et

$$
\begin{aligned}
& 2CB_1 + A_1 B \\
& \quad = \frac{1}{D(c-z)}\left[2A_1^2 B_1 pq - 2A_1 B_1^2(1+p^2) + A_1 B_1^2(1+p^2) - (1+q^2)A_1^3\right] \\
& \quad = \frac{-A_1}{D(c-z)}\left[(A_1 q - B_1 p)^2 + A_1^2 + B_1^2\right] \\
& \quad = \frac{-A_1}{D(c-z)}\left[(a'q - b'p)^2 + A_1^2 + B_1^2\right].
\end{aligned}
$$

L'équation $\Delta(1) = 0$ devient donc, en supprimant le facteur

$$\frac{(a'q - b'p)^2 + A_1^2 + B_1^2}{D^2(c-z)},$$

$$\frac{R'}{R^2}(b'p - a'q) + \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}(A_2 B_1 - B_2 A_1) = 0. \tag{11}$$

Il reste donc à exprimer que cette équation (11) est identiquement vérifiée par tous les points du périsphère représenté par les équations (7). Nous avons à développer l'équation (11). Pour cela, introduisons la nouvelle fonction auxiliaire

$$2k = a'^2 + b'^2 + c'^2 - R'^2,$$

dont le choix sera justifié ultérieurement

$$k' = a'a'' + b'b'' + c'c'' - R'R''.$$

La valeur de D (8) devient ainsi

$$D = a''(x-a) + b''(y-b) + c''(z-c) + RR'' - 2k,$$

ou, en posant

$$
\begin{aligned}
x - a &= X, \\
y - b &= Y, \\
z - c &= Z,
\end{aligned}
$$

$$D = a''X + b''Y + c''Z + RR'' - 2k.$$

Les équations (7) et (11) s'écrivent aussi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0, \tag{12}$$

$$a'X + b'Y + c'Z + RR' = 0, \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{b'X - a'Y}{Z}(a''X + b''Y + c''Z + RR'' - 2k)R' \\ &\qquad\qquad + R^2\frac{\partial H}{\partial \lambda}(A_2B_1 - B_2A_1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Or

$$\begin{aligned} A_2B_1 - B_2A_1 &= (a'' + pc'')(b' + qc') - (b'' + qc'')(a' + pc') \\ &= a''b' - a'b'' + p(b'c'' - c'b'') + q(a''c' - a'c'') \\ &= a''b' - a'b'' - \frac{X}{Z}(b'c'' - c'b'') - \frac{Y}{Z}(a''c' - a'c'') \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{Rc' + R'Z}{R^2}.$$

L'équation (14) s'écrit donc finalement

$$\left\{\begin{aligned} &R'(b'X - a'Y)(a''X + b''Y + c''Z + RR'' - 2k) + (Rc' + R'Z) \\ &\quad \times [(a''b' - a'b'')Z + (b''c' - b'c'')X + (c''a' - a''c')Y] = 0, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} &\Big| R'b'a'' \Big| X^2 - a'b''R' \Big| \begin{matrix} Y^2 + a''b'R' \\ - a'b''R' \end{matrix} \Big| \begin{matrix} Z^2 - a'a''R' \\ + b'b''R' \end{matrix} \Big| XY \\ &\qquad \times \Big| -a''c'R' \Big| YZ + b''c'R' \Big| ZX + \text{des termes du premier degré} = 0. \end{aligned}$$

Mais on a identiquement, en vertu des équations (12) et (13),

$$R'b'a''(X^2 + Z^2) - a'a''R'XY - a''R'c'YZ = a''b'R^2R' + a''RR'^2Y$$

et

$$\begin{aligned} &-R'a'b''(Y^2 + Z^2) + b'b''R'XY + b''c'R'XZ \\ &\qquad = -a'b''R^2R' - b''RR'^2X. \end{aligned}$$

La somme des deux premiers membres de ces identités reproduit l'ensemble des termes du second degré de l'équation (15) qui, développée entièrement, devient, par suite,

$$\begin{aligned} R^2R'(a''b'-a'b'')+RR'^2a''Y-RR'^2b''X-2kR'(b'X-a'Y) \\ +RR'R''(b'X-a'Y)+Rc'(a''b'-a'b'')Z \\ +Rc'(b''c'-b'c'')X+Rc'(c''a'-a''c')Y=0. \end{aligned}$$

Ajoutons au premier membre la quantité

$$R(a'b''-a''b')(a'X+b'Y+c'Z+RR'),$$

qui est nulle, à cause de l'équation (13); il vient

$$\left.\begin{aligned} a''RY(R'^2-c'^2-b'^2)-b''RX(R'^2-c'^2-a'^2)+RR'R''(b'X-a'Y) \\ -b'RX(a'a''+c'c'')+a'RY(c'c''+b'b'')-2kR'(b'X-a'Y) \end{aligned}\right\}=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned} a''RY(-2k+a'^2)+b''RX(2k-b'^2)-b'RX(a'a''+c'c'') \\ +a'RY(c'c''+b'b'')-2kR'(b'X-a'Y)+RR'R'(b'X-a'Y) \end{aligned}\right\}=0,$$

ou enfin

$$(16)\quad 2k(a'R'Y-b'R'X-a''RY+b''RX)+k'R(a'Y-b'X)=0.$$

Telle est l'équation qui doit être identiquement vérifiée en vertu des équations (12) et (13). Au lieu d'éliminer Z et le paramètre λ entre ces trois équations, ce qui est impossible, je vais éliminer X et Y et exprimer que l'équation résultante en Z et λ est identique. Mais je remarque auparavant que l'équation (16) est une identité si

$$2k=a'^2+b'^2+c'^2-R'^2=0.$$

On a donc une première solution du problème; mais cette solution, qui justifie le choix de l'inconnue auxiliaire $2k$, ne donne aucune surface réelle. En effet, la condition $2k=0$ exprime que chaque sphère (7) touche son enveloppe en un point-cercle. Cependant, au point de vue

imaginaire, nous avons le théorème suivant qui donne de l'équation (3) une solution avec deux fonctions arbitraires :

Étant donnée une courbe gauche quelconque, si l'on mène une série de plans perpendiculaires aux tangentes de cette courbe tels que le point de rencontre M *d'une tangente avec le plan qui lui est perpendiculaire décrive une développante de la courbe, et si dans chacun de ces plans on mène les deux droites isotropes qui se croisent au point* M, *le lieu de ces droites sera une surface qui, par une translation quelconque, engendrera une famille de Lamé.*

Mais, dans ce cas, le système triplement orthogonal n'est pas complété par deux familles distinctes de la première.

Je supposerai donc k différent de zéro : on tire des équations (13) et (16)

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{-RR' - c'Z}{a'\alpha + b'\beta},$$

en posant

$$\alpha = 2k(a'R' - a''R) + k'a'R,$$

$$\beta = 2k(b'R' - b''R) + k'b'R.$$

Portons les valeurs de X et de Y

$$X = -\alpha\frac{RR' + c'Z}{a'\alpha + b'\beta}, \qquad Y = -\beta\frac{RR' + c'Z}{a'\alpha + b'\beta}$$

dans l'équation (12). Cette dernière équation devant être identiquement vérifiée, quelles que soient les valeurs données à Z et à λ, le coefficient de Z^2 doit être nul, d'où la condition

$$(\alpha^2 + \beta^2)c'^2 + (a'\alpha + b'\beta)^2 = 0.$$

En annulant le terme en Z et le terme tout connu, on trouve

$$RR'c'(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

et

$$(\alpha^2 + \beta^2)R'^2 - (a'\alpha + b'\beta)^2 = 0.$$

Si $\alpha^2 + \beta^2$ n'est pas nul, il résulte nécessairement de ces trois équa-

tions les trois nouvelles conditions

$$R' = 0,$$

$$c' = 0,$$

$$a'\alpha + b'\beta = 0,$$

dont la dernière résulte des deux précédentes. Donc *les surfaces-canal dont la directrice est une courbe plane située dans un plan perpendiculaire à OZ répondent à la question.* Mais cette solution, d'ailleurs évidente, n'est pas nouvelle : elle rentre dans les surfaces-moulures précédemment trouvées.

Si $\alpha^2 + \beta^2$ est nul, on doit poser, en se bornant aux surfaces réelles,

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = 0$$

ou

$$2k(a'R' - a''R) + k'a'R = 0,$$

$$2k(b'R' - b''R) + k'b'R = 0,$$

et ces conditions sont suffisantes.

Divisons les deux membres de la première équation par $2ka'R$, de la seconde par $2kb'R$, il vient

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{R'}{R} - \frac{a''}{a'} + \frac{k'}{2k} = 0,\\ &\frac{R'}{R} - \frac{b''}{b'} + \frac{k'}{2k} = 0;\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'},$$

$$a' = mb',$$

$$a = mb + n,$$

m et n étant deux constantes. Ainsi la courbe directrice du périsphère doit être située dans un plan parallèle à la translation : je supposerai que ce plan soit le plan ZOx

$$b = 0.$$

L'équation (17) donne ensuite

$$\log R - \log a' + \log \sqrt{k} = \log \frac{m}{\sqrt{2}}$$

ou

$$R\sqrt{2k} = ma',$$

m étant une constante arbitraire. Élevons au carré, il vient

$$(18) \qquad R^2(a'^2 + c'^2 - R'^2) = m^2 a'^2.$$

Ainsi nous obtiendrons des solutions du problème proposé de la manière suivante :

Décrivons dans un plan parallèle à Oz *une courbe arbitraire, et, de tous les points de cette courbe comme centres, décrivons des sphères dont le rayon sera déterminé en fonction des coordonnées du centre par l'équation* (18). *Ces sphères enveloppent une surface qui, par translation parallèle à* Oz, *engendrera une famille de Lamé.*

L'équation (18) est susceptible d'une interprétation géométrique. Posons

$$R^2 = u,$$

d'où

$$2RR' = u'.$$

L'équation (18) devient

$$(19) \qquad (a'^2 + c'^2)u - \frac{u'^2}{4} = m^2 a'^2,$$

et la section de la surface par le plan zOx résulte de l'élimination de λ entre les deux équations

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = u,$$
$$2a'(x-a) + 2c'(z-c) + u' = 0.$$

La première de ces deux équations est celle d'une circonférence; la seconde est celle de la corde de contact de la circonférence avec son

enveloppe. Soit δ la distance de cette corde au centre de la circonférence, on a

$$\delta^2 = \frac{a'^2}{4(a'^2 + c'^2)},$$

et l'équation (19) peut s'écrire

$$(20) \qquad u - \delta^2 = m^2 \frac{a'^2}{a'^2 + c'^2}.$$

Soit θ l'angle que fait avec Ox la tangente en M à la courbe directrice du périsphère, PQ le rayon de la ligne de courbure circulaire correspondant au point M : nous aurons

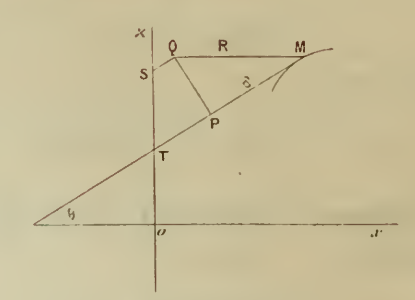
$$\overline{PQ}^2 = u - \delta^2,$$

$$\cos^2\theta = \frac{a'^2}{a'^2 + c'^2},$$

d'où, en portant ces valeurs dans l'équation (26),

$$PQ = m \cos\theta;$$

or, soient T le point de rencontre de Oz avec la tangente MT, S celui



de Oz avec la parallèle à MT menée par le point Q, on voit que

$$PQ = ST \cos\theta.$$

Donc

$$ST = m.$$

Nous pouvons enfin énoncer le théorème suivant :

Si les cylindres de révolution, qui ont pour bases les diverses lignes de courbure circulaires d'un périsphère symétrique, interceptent une longueur constante sur une droite Δ du plan de symétrie du périsphère, ce périsphère engendrera une famille de Lamé par une translation parallèle à la droite Δ.

Il y a intérêt à montrer qu'on peut avoir des solutions réelles : pour cela récrivons l'équation (19) en prenant a comme variable indépendante

$$u'^2 - 4(1 + c'^2)u + 4m^2 = 0. \tag{21}$$

Cette équation admettra l'intégrale

$$u = 2am,$$

si

$$1 + c'^2 = \frac{m}{a}.$$

Cette dernière équation admet comme intégrale

$$c = -a\sqrt{\frac{m}{a} - 1} + m \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{m}{a} - 1} + \text{const.} \tag{22}$$

La courbe qui représente cette équation a évidemment une partie réelle qui correspond aux valeurs de a comprises entre 0 et m. La valeur de u correspondante est positive, donc le rayon est réel. Enfin, les lignes de courbure circulaires sont réelles et j'ajouterai même que leur plan coupe toujours le périsphère sous l'angle de 45°.

J'ai donc déterminé tous les périsphères réels répondant à la question : il reste à dire quelques mots des surfaces imaginaires pour lesquelles

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Il en résulte

$$a'\alpha + b'\beta = 0.$$

Si donc on prend

$$a = i\beta \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

on aura aussi

$$a' = ib',$$

$$a = ib + h,$$

et cette dernière condition nécessaire est aussi suffisante, comme il est facile de s'en assurer. Donc les périsphères symétriques, par rapport à un plan isotrope, engendrent aussi par translation une famille de Lamé. Cette dernière solution comporte deux fonctions arbitraires, puisque la direction plane et la loi de variation du rayon de la sphère sont arbitraires.

Reprenons le cas des surfaces réelles pour compléter le système triplement orthogonal; le problème, comme on le verra, s'achève par des quadratures. La famille de Lamé, que nous venons de déterminer, s'obtient en éliminant un paramètre variable λ entre les deux équations

$$(23) \qquad (x - a)^2 + y^2 + (z - u - c)^2 = R^2,$$

$$(24) \qquad a'(x - a) + c'(z - u - c) + RR' = 0,$$

dans lesquelles nous avons introduit un nouveau paramètre u dont la variation entraînera le déplacement du périsphère parallèlement à Oz. Il convient aussi de réécrire l'équation de condition entre les fonctions données

$$(26) \qquad R^2(a'^2 + c'^2 - R'^2) - m^2 a'^2 = 0.$$

Toutes les surfaces d'une des deux autres familles couperont la première suivant une première famille de lignes de courbure, par exemple, suivant les lignes de courbure circulaires, et, par conséquent, seront aussi des périsphères. Ce sont celles-là que je vais d'abord déterminer.

Soit

$$(26) \qquad (x - \alpha)^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 - \rho^2 = 0$$

une des sphères enveloppées de ce nouveau périsphère. Cette sphère devra contenir le cercle (23), (24) et de plus couper à angle droit la

sphère (23), ce qui donne les conditions

$$\begin{aligned}\alpha &= a + a'S,\\ \gamma &= u + c + c'S,\\ \rho^2 &= (a'^2 + c'^2)S^2 + 2RR'S + R^2,\\ (a-\alpha)^2 + (u+c-\gamma)^2 &= \rho^2 + R^2.\end{aligned}$$

Dans ces équations, S est une nouvelle variable. On en tire

$$S = -\frac{R}{R'},$$

$$(27)\qquad \begin{cases} \alpha = a - a'\dfrac{R}{R'}, \qquad \gamma = u + c - c'\dfrac{R}{R'},\\ \rho^2 = \dfrac{(a'^2 + c'^2 - R'^2)R^2}{R'^2} = \dfrac{m^2 a'^2}{R'^2},\\ \rho = \dfrac{ma'}{R'}.\end{cases}$$

Je vais maintenant considérer le paramètre u comme une fonction de λ et assujettir la sphère (26) à toucher son enveloppe précisément suivant le cercle qui a pour équations les équations (23) et (24). Il suffit pour cela que les deux plans de contact des sphères (23) et (26) avec leurs enveloppes coïncident, c'est-à-dire que

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\gamma'}{c'} = \frac{\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - \rho\rho'}{aa' + c'(u+c) - RR'}.$$

Or

$$\begin{aligned}\alpha' &= a' + Sa'' + a'S',\\ \gamma' &= u' + c' + Sc'' + c'S'.\end{aligned}$$

La première des deux conditions précédentes devient donc

$$\frac{a''}{a'}S = \frac{c''}{c'}S + \frac{u'}{c'}$$

ou

$$u' = \frac{a''c' - a'c''}{a'}S = \frac{a'c'' - a''c'}{a'}\frac{R}{R'};$$

$$(28)\qquad u = \int \frac{a'c'' - a''c'}{a'}\frac{R}{R'}\,d\lambda = v + u_1,$$

en posant

$$(29) \qquad u_1 = \int_0^{\lambda} \frac{a'c'' - a''c'}{a'} \frac{R}{R'} d\lambda.$$

Quant à la seconde condition, il est facile de voir qu'elle est une conséquence de la première si l'on a bien soin de prendre

$$\rho = \frac{ma'}{R'}.$$

Donc la seconde famille de Lamé du système triplement orthogonal sera déterminée par les équations

$$(30) \qquad (x - \alpha)^2 + y^2 + (z - \gamma - c)^2 - \rho^2 = 0,$$

$$(31) \qquad \alpha'(x - \alpha) + \gamma'(z - \gamma - c) + \rho\rho' = 0,$$

où nous avons mis en évidence la constante c dont la variation entraînera le déplacement de la surface parallèlement à Oz. Les fonctions α, γ et ρ sont déterminées par les équations (27), (28) et (29).

Remarque. — On tire des équations précédentes

$$a' = \frac{\rho R'}{m},$$

$$c' = \frac{\rho R' \gamma'}{\alpha' m},$$

$$R = \frac{m\alpha'}{\rho'};$$

d'où

$$R^2(a'^2 + c'^2 - R'^2) - m^2 a'^2 = \frac{R'^2}{\rho'^2}\left[\rho^2(\alpha'^2 + \gamma'^2 - \rho'^2) - m^2\alpha'^2\right].$$

Or le premier membre de cette égalité est nul en vertu de l'équation (25); donc le second l'est, et l'on a

$$\rho^2(\alpha'^2 + \gamma'^2 - \rho'^2) - m^2\alpha'^2 = 0,$$

équation qui joue dans la seconde famille le même rôle que l'équa-

tion (25) dans la première. Il faut remarquer que la même constante m figure dans les deux cas, ce que l'interprétation géométrique (25) ou (18), donnée plus haut, permettait de prévoir.

Il nous reste enfin à définir la troisième famille de surfaces. Soit

$$w = f(x, y, z)$$

l'équation de cette famille. Si u et v sont les paramètres directeurs des deux autres familles, on doit avoir, comme on sait,

$$(32) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(33) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Mais il est évident que toute surface de la troisième famille doit pouvoir, par une translation parallèle à Oz, engendrer la famille complète ; donc

$$w = z + \varphi(x, y)$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 1.$$

Alors les équations (32) et (33) feront connaître $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ et l'on obtiendra w en intégrant une différentielle totale. Effectuons le calcul : j'ai d'abord besoin d'avoir $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$; pour cela, je différentie totalement l'équation (23), ce qui donne, en tenant compte de l'équation (24),

$$(x - a)\,dx + y\,dy + (z - u - c)(dz - du) = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x - a}{z - u - c},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{z - u - c},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

De même

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x - \alpha}{x - v - \gamma},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{z - v - \gamma},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 1,$$

et les équations qui déterminent ϖ deviennent

$$(x - a)\frac{\partial \varpi}{\partial x} + y\frac{\partial \varpi}{\partial y} + z - u - c = 0,$$

$$(x - \alpha)\frac{\partial \varpi}{\partial x} + y\frac{\partial \varpi}{\partial y} + z - v - \gamma = 0;$$

d'où

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = \frac{v + \gamma - u - c}{a - \alpha}, \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{(z - v - \gamma)(x - a) - (z - u - c)(x - \alpha)}{y(a - \alpha)},$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{a(v + \gamma) - \alpha(u + c) + (u + c - v - \gamma)x + (\alpha - a)z}{y(a - \alpha)}.$$

Or

$$\alpha = a + a'\mathrm{S},$$

$$v + \gamma = u + c + c'\mathrm{S}:$$

donc

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = -\frac{c'}{a'},$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{a(u + c + c'\mathrm{S}) - (a + a'\mathrm{S})(u + c) - c'\mathrm{S}x + a'\mathrm{S}z}{-a'\mathrm{S}y},$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{a'(u + c) - ac' + c'x - a'z}{a'y} = \frac{c'(x - a) - a'(z - u - c)}{a'y}$$

$$d\varpi = -\frac{c'}{a'}dx + \frac{c'(x - a) - a'(z - u - c)}{a'y}dy + dz.$$

$d\varpi$ est une différentielle exacte, comme un intéressant calcul permettrait de le vérifier. Mais on sait que, si deux familles de surfaces se coupent à angle droit suivant leurs lignes de courbure, elles font partie d'un système triplement orthogonal et la troisième famille existe. La

vérification est donc inutile et l'on a

$$w = z + \varphi(x, y),$$
$$w = z + \int\left[-\frac{c'}{a'}dx + \frac{c'(x-a) - a'(z-u-c)}{a'y}dy\right],$$

ou, en tenant compte de l'équation (24),

$$w = z + \int\left[-\frac{c'}{a'}dx + \frac{(a'^2 + c'^2)(x-a) + a'RR'}{a'c'y}dy\right].$$

Dans cette égalité, λ est considéré comme une fonction de x et de y, définie par les équations (23) et (24). Le problème est donc entièrement résolu.

Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables;

PAR M. GUSTAF KOBB, A STOCKHOLM.

Dans son célèbre Mémoire *Recherches sur les fonctions algébriques* (¹), Puiseux a le premier étudié les points singuliers des courbes algébriques. Plus tard, M. Weierstrass, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions algébriques et des fonctions abéliennes,* a donné une nouvelle théorie des fonctions algébriques d'une seule variable, qui est extrêmement élégante.

L'objet de ce Mémoire sera, en suivant une méthode analogue à celle de M. Weierstrass, d'étudier les points singuliers des fonctions algébriques de deux variables et, en particulier, de donner la représentation analytique de la fonction dans le voisinage de ces points.

Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface algébrique; nous nous proposons de représenter toutes les valeurs de x, y, z qui sont situées dans le voisinage d'un point arbitraire (a, b, c) de la surface par des séries, procédant suivant des puissances entières et positives de deux variables auxiliaires.

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. XV.

Posons d'abord

$$x = u + a, \qquad y = v + b, \qquad z = w + c,$$

on aura

$$f(x, y, z) = Au + Bv + Cw + (u, v, w)_2 + \ldots,$$

où

$$(u, v, w)_\mu$$

contient les termes d'ordre μ. Si tous les coefficients A, B, C ne sont pas nuls, nous pouvons choisir deux fonctions linéaires et homogènes de u, v, w

$$s = \alpha\, u + \beta\, v + \gamma\, w,$$
$$t = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w,$$

telles que le déterminant

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Considérons alors le système

$$0 = Au + Bv + Cw + (u, v, w)_2 + \ldots,$$
$$s = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$
$$t = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w.$$

Le déterminant des termes linéaires de ce système n'étant pas zéro, toutes les valeurs de u, v, w dans le voisinage du point (0, 0, 0) sont données par les formules

$$u = p_1(s, t),$$
$$v = p_2(s, t),$$
$$w = p_3(s, t),$$

où $p_1(s, t)$, $p_2(s, t)$, $p_3(s, t)$ sont des séries entières de s et t qui s'annulent en même temps que les variables elles-mêmes ([1]).

([1]) Nous entendons toujours, dans la suite, par $p(\sigma, \tau)$ une série de cette forme.

En revenant aux variables x, y, z, nous aurons, par conséquent, toutes les valeurs de x, y, z dans le voisinage du point (a, b, c) de la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

par le système

$$x = a + p_1(s, t), \qquad y = b + p_2(s, t), \qquad z = c + p_3(s, t).$$

La question est beaucoup plus difficile si les trois coefficients A, B, C s'annulent, c'est-à-dire, si le point (a, b, c) est un point multiple de la surface.

Soit

$$f(x, y, z) = F(u, v, w) = (u, v, w)_m + (u, v, w)_{m+1} + \ldots.$$

L'équation $F(u, v, w) = 0$ commence par des termes d'ordre m,

$$m \geqq 2.$$

Posons ensuite

$$(3) \qquad \begin{cases} u = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \\ v = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \\ w = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{cases}$$

où les coefficients α, β, γ sont seulement assujettis à la condition de ne pas annuler le déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Alors

$$F(u, v, w) = \Phi(\xi, \eta, \zeta),$$
$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = (\xi, \eta, \zeta)_m + (\xi, \eta, \zeta)_{m+1} + \ldots.$$

Les deux surfaces $F(u, v, w) = 0$ et $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ se correspondent point par point. A un point de la surface $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ ne correspond qu'un seul point de la surface $F(u, v, w) = 0$ et *vice versa*. Au lieu

de considérer la surface $F(u, v, w) = 0$ au voisinage du point $(0, 0, 0)$, nous pouvons considérer la surface $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ au voisinage du même point.

Substituons maintenant

$$(5) \qquad \xi = \tau\zeta, \qquad \eta = \sigma\zeta,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta^m[(\tau, \sigma, 1)_m + \zeta(\tau, \sigma, 1)_{m+1} + \ldots] \\ &= \zeta^m[\varphi(\tau, \sigma) + \zeta\chi(\tau, \sigma) + \ldots],\end{aligned}$$

où

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

est une courbe algébrique d'ordre m. Supposons d'abord qu'elle soit irréductible, et soit $(\bar{a}, \bar{b})$ un point régulier de la courbe. Posons

$$\tau = \tau_1 + \bar{a}, \qquad \sigma = \sigma_1 + \bar{b}.$$

Alors

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \zeta^m \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = \zeta^m \overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0,$$

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = A\tau_1 + B\sigma_1 + C\zeta + (\tau_1, \sigma_1, \zeta)_2 + \ldots,$$

$$A \gtrless 0;$$

d'où suit

$$(6) \qquad \tau_1 = p(\sigma_1, \zeta).$$

Cette série nous donne tout le domaine du point $(0, 0, 0)$ de la surface algébrique

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0,$$

et, par conséquent, d'après (5) et (3), au moins une partie du domaine du point $(0, 0, 0)$ de la surface

$$F(u, v, w) = 0,$$

ou du point (a, b, c) de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

En prenant un autre point régulier $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

nous obtenons une autre série de la forme (6), qui nous donne une autre partie du domaine du point (0, 0, 0) de la surface

$$F(u, v, w) = 0.$$

Il faut, maintenant, chercher les rayons de convergence de la série (6)

$$\tau_1 = p(\sigma_1, \zeta).$$

Supposons qu'elle converge pour

$$|\sigma_1| < \delta_1, \qquad |\zeta| < \delta,$$

et choisissons une valeur $\bar{b}_1$ telle que

$$|\bar{b}_1 - \bar{b}| < \delta_1.$$

Alors le point

$$\sigma_1 = \bar{b}_1 - \bar{b}, \qquad \zeta = 0$$

appartient au domaine de convergence de la série (6). D'autre part, si $\bar{b}_1$ a été choisi de telle sorte que l'équation

$$\varphi(\tau, \bar{b}_1) = 0$$

a m racines distinctes $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$, nous aurons

$$\Phi(\tau - \bar{a}_\lambda, \sigma - \bar{b}_1, \zeta) = A_\lambda(\tau - \bar{a}_\lambda) + B_\lambda(\sigma - \bar{b}_1) + C_\lambda \zeta + (\ldots)_2 + \ldots,$$

$$A_\lambda \gtrless 0,$$

et, par conséquent,

$$(7) \qquad \tau - \bar{a}_\lambda = p_\lambda(\sigma - \bar{b}_1, \zeta)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous pouvons, évidemment, toujours supposer que l'équation

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

contienne les termes τ^m et σ^m, car dans l'autre cas il suffirait d'introduire de nouvelles variables par une substitution linéaire et homogène, c'est-à-dire, faire un nouveau choix de coefficients de la substitution (3).

Les séries (7) nous donnent toutes les valeurs de τ au voisinage de

$$\sigma = \bar{b}_1, \qquad \zeta = 0,$$

mais une partie de ses valeurs sont aussi données par la série (6)

$$\tau_1 = p(\sigma_1, \zeta) = p(\sigma - \bar{b}, \zeta).$$

Par conséquent, une des séries (7) doit être identique avec la série (6) pour tous les points de leur domaine de convergence commun. Mais alors, d'après la terminologie de M. Weierstrass, cette série est la continuation analytique de la série (6) au point

$$\sigma = \bar{b}_1, \qquad \zeta = 0.$$

Ainsi, pour chaque point $(\bar{b}_1, 0)$,

$$|\bar{b}_1 - \bar{b}| \leqq \delta_1,$$

où l'on n'a pas en même temps

(8) $$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0,$$

il existe une continuation analytique. Il s'ensuit que, pour des valeurs assez petites de ζ, la série (6) converge, si δ_1 est au plus égal à la distance du point $\bar{b}$ au point le plus prochain, pour lequel les équations (8) sont satisfaites. Mais alors δ_1 est égal au rayon de convergence de la série

$$\tau - \bar{a} = \bar{p}(\sigma - \bar{b}),$$

qui représente le domaine du point $(\bar{a}, \bar{b})$ de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0.$$

Cette valeur de δ_1 n'est pourtant qu'une limite supérieure, et il peut se présenter que le rayon de convergence correspondant en ζ tende vers zéro. Mais, évidemment, nous n'avons pas besoin de prendre pour δ_1 la valeur extrême et alors nous sommes toujours certain d'obtenir un rayon de convergence, en ζ, qui n'est pas nul.

Supposons, maintenant, que $(\overline{a}_1, \overline{b}_1)$ soit un point critique de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

pour lequel on a

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, \sigma) &= (\tau - \overline{a}_1, \sigma - \overline{b}_1)_\mu + (\tau - \overline{a}_1, \sigma - \overline{b}_1)_{\mu+1} + \ldots \\ &= (\tau_1, \sigma_1)_\mu + (\tau_1, \sigma_1)_{\mu+1} + \ldots,\end{aligned}$$

en posant

$$\tau - \overline{a}_1 = \tau_1, \qquad \sigma - \overline{b}_1 = \sigma_1.$$

La courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

étant irréductible, on a, certainement,

$$\mu < m.$$

On peut supposer que

$$(\tau_1, \sigma_1)_\mu$$

contient le terme τ_1^μ.

Ensuite, on aura

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \zeta^m \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = \zeta^m \overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta),$$

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = (\tau_1, \sigma_1, \zeta)_{\mu_1} + (\tau_1, \sigma_1, \zeta)_{\mu_1+1} + \ldots \tag{10}$$

où

$$\mu_1 \leqq \mu < m.$$

Ainsi, nous avons ramené l'étude du point multiple (0, 0, 0) d'ordre m de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

à l'étude du point multiple (o, o, o) de la surface

$$\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0,$$

mais, dans la dernière, le point multiple est d'un ordre moins élevé.

A chaque point du domaine du point (o, o, o) de la dernière surface correspond un seul point du domaine du point (o, o, o) de la première, mais pas inversement. En effet, d'après le théorème fondamental de M. Weierstrass, on a

$$(11)\quad \begin{cases} \bar{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = [\tau_1^{\mu} + \bar{p}_1(\sigma_1, \zeta)\tau_1^{\mu-1} + \ldots \\ \qquad\qquad + \bar{p}_{\mu-1}(\sigma_1, \zeta)\,\tau_1 + \bar{p}_{\mu}(\sigma_1, \zeta)]\,\bar{G}(\tau_1, \sigma_1, \zeta) \end{cases}$$

où

$$\bar{G}(0, 0, 0) \gtrless 0;$$

mais

$$(12)\quad \Phi(\xi, \eta, \zeta) = [\xi^m + p_1(\eta, \zeta)\xi^{m-1} + \ldots + p_m(\eta, \zeta)]\,G(\xi, \eta, \zeta)$$
$$G(0, 0, 0) \gtrless 0.$$

A un système de σ_1 et ζ correspond un seul système de η et ζ, mais le dernier nous donne m valeurs de ξ et le premier seulement μ valeurs de τ_1, dont chacune correspond à une seule valeur de ξ. Ainsi le domaine du point (o, o, o) de la surface

$$\bar{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0$$

ne nous donne, par conséquent, qu'une partie du domaine du point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Pour trouver le domaine de convergence des séries

$$\bar{p}_1(\sigma_1, \zeta), \quad \bar{p}_2(\sigma_1, \zeta), \quad \ldots, \quad \bar{p}_{\mu}(\sigma_1, \zeta)$$

de la formule (11), nous procédons d'une manière analogue qu'auparavant. Elles convergent pour

$$|\sigma_1| < \delta_1, \qquad |\zeta| < \delta.$$

Soit $\bar{b}_2$ une valeur de σ, telle que

$$|\bar{b}_2 - \bar{b}_1| < \delta_1,$$

et que l'équation

$$\varphi(\tau, \bar{b}_2) = 0,$$

ait m racines distinctes

$$a_2^{(1)}, \quad a_2^{(2)}, \quad a_2^{(m)}.$$

Alors on a

$$\bar{\Phi}(\tau - a_2^{(\lambda)}, \sigma - \bar{b}_2, \zeta) = A_\lambda(\tau - a_2^{(\lambda)}) + B_\lambda(\sigma - \bar{b}_2) + \ldots$$

et

$$\tau - a_2^{(\lambda)} = p_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m),$$

ou

$$\tau = \tau_1 + \bar{a}_2,$$

$$\tau_1 = a_2^\lambda - \bar{a}_2 + p_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

(13) $$\tau_1 = P_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta).$$

Ces séries nous donnent toutes les valeurs de τ_1 au voisinage du point

$$\sigma = \bar{b}_2, \qquad \zeta = 0;$$

mais μ de ses valeurs sont aussi données par la formule (11),

(14) $$\tau_1^\mu + \bar{p}_1(\sigma_1, \zeta)\tau_1^{\mu-1} + \ldots + \bar{p}_{\mu-1}(\sigma_1, \zeta)\tau_1 + \bar{p}_\mu(\sigma_1, \zeta) = 0.$$

Supposons que

$$\tau_1 = P_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta); \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \mu)$$

soient ces valeurs et formons le produit

(15) $$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{\nu=1}^{\mu} [\tau_1 - P_\nu(\sigma - \bar{b}_2, \zeta)] \\ \qquad = \tau_1^\mu + \bar{P}_1(\sigma - \bar{b}_2, \zeta)\tau_1^{\mu-1} + \ldots + \bar{P}_\mu(\sigma - \bar{b}_2, \zeta) = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (14) et (15) ayant les mêmes racines, leurs coeffi-

cients doivent être identiques; ainsi

$$\overline{p}_\nu(\sigma_1, \zeta) = \overline{P}_\nu(\sigma - \overline{b}_2, \zeta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \mu)$$

pour leur domaine de convergence commun. Par conséquent,

$$\overline{P}_\nu(\sigma - \overline{b}_2, \zeta)$$

est la continuation analytique de la série

$$\overline{p}_\nu(\sigma_1 \zeta) \qquad \sigma = \sigma_1 + \overline{b}_1$$

au point

$$\sigma = b_2, \qquad \zeta = 0.$$

Il s'ensuit que, pour des valeurs assez petites de ζ, les séries

$$\overline{p}_\nu(\sigma_1, \zeta)$$

convergent, si δ_1 est au plus égal à la distance du point $\overline{b}_1$ au point le plus prochain, où les deux équations

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0$$

sont satisfaites. Mais c'est justement le rayon de convergence des séries qui forment les coefficients de l'équation

$$\tau_1^\mu + p_1(\sigma_1)\tau_1^{\mu-1} + \ldots + p_{\mu-1}(\sigma_1)\tau_1 + p_\mu(\sigma_1) = 0$$

qui nous donne les μ valeurs de τ de l'équation

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

qui se confondent pour

$$\sigma = \overline{b}_1 \qquad \text{ou} \qquad \sigma_1 = 0.$$

Il nous reste à étudier les points de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

qui sont situés à une distance infinie. Nous pouvons toujours supposer que tous ces points soient de la forme

$$(\infty, \infty),$$

et, de plus, que le quotient

$$\lim_{\sigma=\infty}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)$$

tend vers m valeurs finies distinctes

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_m.$$

En effet, si la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

n'a pas cette propriété, il suffit de faire une transformation homographique; mais cela revient à faire un nouveau choix de coefficients dans la substitution (3).

Nous avons

$$\begin{aligned}\zeta^{-m}\Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \varphi(\tau, \sigma)_m + \zeta\chi_1(\tau, \sigma)_{m+1} + \zeta^2\chi_2(\tau, \sigma)_{m+2} + \ldots \\ &= \sigma^m\left[\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)_m + \zeta\sigma\chi_1\left(\frac{\tau}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)_{m+1} + (\zeta, \sigma)^2\chi_2\left(\frac{\tau}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)_{m+2} + \ldots\right.\end{aligned}$$

ou, en posant,

$$\frac{\tau}{\sigma} = \tau_1; \qquad \frac{1}{\sigma} = \sigma_1; \qquad \zeta\sigma = \eta;$$

le second membre devient

$$\sigma^m\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \eta) = 0.$$

Mais le point

$$\sigma_1 = 0, \qquad \tau_1 = c_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

est un point régulier; ainsi

$$\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = A_\lambda(\tau_1 - c_\lambda) + B_\lambda\sigma_1 + C_\lambda\eta + \ldots,$$

$$A_\lambda \gtrless 0$$

et

$$(16) \qquad \tau_1 - c_\lambda = p_\lambda(\sigma_1, \eta) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Par conséquent, le domaine du point

$$(\infty, \infty, 0)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

est représenté par m séries distinctes.

Quant à la valeur du rayon de convergence en σ_1 des séries (16), il est facile de voir qu'elles convergent pour des valeurs assez petites de η_1, si

$$|\sigma_1| < \frac{1}{\delta_1}$$

ou

$$|\sigma| > \delta_1,$$

où δ_1 est la valeur absolue la plus grande de σ, qui correspond à un point critique de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

où deux ou plusieurs valeurs de τ se confondent.

Ainsi nous avons vu que, si nous choisissons un point arbitraire $(\overline{a}, \overline{b})$ de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

nous obtenons une partie du domaine du point multiple (0, 0, 0) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Nous allons montrer qu'il suffit de choisir un nombre fini de points $(\overline{a}, b)$ pour représenter tout le domaine du point multiple en question. En effet, dans la théorie des courbes algébriques, on démontre qu'il suffit de choisir un nombre fini de points

$$(17) \qquad a_1 b_1, \quad a_2 b_2, \quad \ldots, \quad a_r b_r$$

de la courbe algébrique

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

pour que les séries qui représentent les domaines de ces points représentent aussi, prises ensemble, toute la courbe algébrique.

Les points $a_1 b_1, \ldots, a_r b_r$ peuvent être choisis d'une infinité de manières, mais la suite contient toujours ou bien tous les points communs aux équations

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0,$$

ou bien aux équations

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = 0,$$

et ensuite un certain nombre de points réguliers. Nous choisissons les points $a_1 b_1, \ldots, a_r b_r$ de la première manière. Puis, nous aurons pour chaque point (a_λ, b_λ) de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

ou bien

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = A_\lambda(\tau - a_\lambda) + B_\lambda(\sigma - b_\lambda) + C_\lambda \zeta + \ldots,$$

(18) $$A_\lambda \gtrless 0,$$

si (a_λ, b_λ) est un point régulier, ou bien

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = (\tau - a_\lambda, \sigma - b_\lambda, \zeta)_{\mu'_\lambda} + (\tau - a_\lambda, \sigma - b_\lambda, \zeta)_{\mu'_\lambda + 1} + \ldots$$
$$\mu'_\lambda \leqq \mu_\lambda < m,$$

si μ_λ est le nombre de valeurs de τ de l'équation

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

qui se confondent pour $\sigma = b_\lambda$.

Dans le premier cas, toutes les valeurs de τ, σ, ζ dans le voisinage du point $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

sont données par la série

(19) $$\tau - a_\lambda = p_\lambda(\sigma - b_\lambda, \zeta),$$

à laquelle correspond, pour la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

la série

$$(20) \qquad \tau - a_\lambda = \bar{p}_\lambda(\sigma - b_\lambda).$$

Dans le second cas, toutes les valeurs de τ, σ, ζ dans le voisinage du point multiple $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ sont données par l'équation

$$(21) \quad (\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda} + p_1(\sigma - b_\lambda, \zeta)(\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda - 1} + \ldots + p_{\mu_\lambda}(\sigma - b_\lambda, \zeta) = 0,$$

à laquelle correspond, pour la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

l'équation

$$(22) \quad (\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda} + \bar{p}_1(\sigma - b_\lambda)(\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda - 1} + \ldots + \bar{p}_{\mu_\lambda}(\sigma - b_\lambda) = 0.$$

Les séries

$$p_\lambda(\sigma - b_\lambda, \zeta) \quad \text{et} \quad p_\lambda(\sigma - b_\lambda)$$

des formules (19) et (20) ont le même rayon de convergence en $(\sigma - b_\lambda)$. Les séries

$$p_\nu(\sigma - b_\lambda, \zeta) \quad \text{et} \quad \bar{p}_\nu(\sigma - b_\lambda) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu_\lambda),$$

qui sont les coefficients des équations (21) et (22), ont aussi le même rayon de convergence en $(\sigma - b_\lambda)$.

La courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

étant d'ordre m, les formules (20) et (22) donnent, exactement, m valeurs de τ pour chaque valeur de σ; par conséquent, les formules (19) et (21) nous donnent aussi m valeurs de τ pour chaque système de valeurs de σ et ζ. Il suit de là que les domaines des points

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r),$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

pris ensemble, représentent tout le domaine du point multiple $(0, 0, 0)$ de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

En effet, d'après (12), tout le domaine du point $(0, 0, 0)$ de cette surface est donné par l'équation

$$(23) \quad \xi^m + p_1(\eta, \zeta)\xi^{m-1} + \ldots + p_{m-1}(\eta, \zeta)\xi + p_m(\eta, \zeta) = 0.$$

Ainsi, pour

$$|\eta| < \delta, \qquad |\zeta| < \delta,$$

nous aurons m valeurs de ξ; mais, d'autre part, on a

$$\sigma = \frac{\eta}{\zeta}.$$

Supposons que δ ait été choisi si petit, que les séries (19) et (21) convergent. Nous avons vu que, pour chaque système de valeurs de σ et ζ,

$$|\zeta| < \delta,$$

les formules (19) et (21) nous donnent, exactement, m valeurs de τ et, comme nous avons

$$\xi = \tau\zeta,$$

aussi m valeurs de ξ, ou, justement, le même nombre, qui est fourni par l'équation (23).

Ainsi, quelle que soit la valeur du rapport

$$\frac{\eta}{\zeta},$$

les formules (19) et (21) nous donnent, exactement, les m valeurs de ξ que nous devons obtenir d'après l'équation (23). Alors ces deux

systèmes de valeurs doivent être identiques, et, par conséquent, tout le domaine du point multiple (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

est représenté par l'ensemble des domaines des points $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0.$$

Les points $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ sont ou bien réguliers, ou bien des points multiples, mais d'un ordre *moins* élevé que l'ordre du point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Jusqu'ici nous avons considéré le cas où la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

est irréductible. Supposons, maintenant, qu'elle soit réductible

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_1(\tau, \sigma)\,\varphi_2(\tau, \sigma)\ldots\varphi_s(\tau, \sigma) = 0$$

et soient

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_s$$

ses facteurs irréductibles. Supposons d'abord que tous les facteurs soient inégaux. Alors il n'y a pas grand'chose à ajouter à ce que nous avons fait dans le cas où la courbe est irréductible. Quels sont les points critiques qu'il faut considérer? Ce sont les points communs aux équations

$$(24) \qquad \varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0,$$

mais

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_s,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_s + \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \tau}(\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_s).$$

Ainsi, les points communs aux équations (24) sont les points communs aux équations

$$\varphi_\nu(\tau,\sigma)=0, \qquad \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\tau}=0 \qquad\qquad (\nu=1,2,\ldots,s)$$

et les points communs aux équations

$$\varphi_\nu(\tau,\sigma)=0, \qquad \varphi_\mu(\tau,\sigma)=0 \left\{\begin{array}{l}\nu=1,2,\ldots,s,\\ \mu=1,2,\ldots,s,\\ \mu\gtrless\nu.\end{array}\right.$$

Puis, en prenant un point arbitraire (a_ν, b_ν) de la courbe

$$\varphi(\tau,\sigma)=0,$$

nous obtenons, ou bien un développement de la forme

$$(25) \qquad \tau-a_\nu=p(\sigma-b_\nu,\zeta),$$

ou bien une équation

$$(\tau-a_\nu)^\lambda+p_1(\sigma-b_\nu,\zeta)(\tau-a_\nu)^{\lambda-1}+\ldots+p_\lambda(\sigma-b_\nu,\zeta)=0,$$
$$\lambda<m,$$

et nous démontrons facilement que tous ces développements convergent en $(\sigma-b_\nu)$ jusqu'au point critique le plus prochain de la courbe

$$\varphi(\tau,\sigma)=0.$$

Ensuite, chacune des courbes

$$\varphi_\nu(\tau,\sigma)=0 \qquad\qquad (\nu=1,\ldots,s)$$

peut être représentée par les séries qui représentent les domaines d'un certain nombre de points de la courbe. Ainsi nous formons une suite de la forme (17) de ces points, en ajoutant pourtant les points communs aux équations

$$\varphi_\nu(\tau,\sigma)=0, \qquad \varphi_\mu(\tau,\sigma)=0 \left\{\begin{array}{l}\nu=1,2,\ldots,s,\\ \mu=1,2,\ldots,s,\\ \mu\gtrless\nu.\end{array}\right.$$

Enfin, nous pouvons démontrer, en suivant la même marche qu'auparavant, que l'ensemble des domaines de ces points

$$(a_\nu, b_\nu, 0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

nous donne tout le domaine du point multiple $(0, 0, 0)$ de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Si un point $(a_\nu, b_\nu, 0)$ est un point multiple, il l'est, certainement, d'un ordre *moins* élevé que l'ordre du point multiple primitif.

Il y a, cependant, un cas d'exception, c'est le cas où les courbes

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_s(\tau, \sigma) = 0$$

se réduisent toutes à des droites qui ont un point commun

$$(a_\mu, b_\mu).$$

Alors il peut se présenter que le point

$$(a_\mu, b_\mu, 0)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

soit un point multiple du même ordre que le point $(0, 0, 0)$ de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Laissons ce cas pour le moment; il sera traité en même temps que le cas où toutes les courbes $\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0$ se réduisent à une seule droite.

Supposons, maintenant, que deux ou plusieurs des courbes

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0,$$

se confondent; ainsi

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_1(\tau, \sigma)^{\lambda_1} \varphi_2(\tau, \sigma)^{\lambda_2} \ldots \varphi_s(\tau, \sigma)^{\lambda_s}.$$

Soit

$$\lambda_1 > 1.$$

Alors un point quelconque de la courbe

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0$$

peut correspondre à un point multiple de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0.$$

En effet, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \varphi_1^{\lambda_1 - 1} \varphi_2^{\lambda_2} \ldots \varphi_s^{\lambda_s} + \varphi_1^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \tau}(\varphi_2^{\lambda_2}, \ldots, \varphi_s^{\lambda_s}),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0,$$

pour chaque point de la courbe

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0.$$

Soit (a_ν, b_ν) un point régulier de cette courbe qui n'appartient pas aux autres courbes

$$\varphi_2(\tau, \sigma) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_s(\tau, \sigma) = 0,$$

nous aurons

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = {} & [(\tau - a_\nu)^{\lambda_1} + p_1(\sigma - b_\nu, \zeta)(\tau - a_\nu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots \\ & + p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta)], \\ & G(\tau - a_\nu, \sigma - b_\nu, \zeta). \end{aligned} \right.$$

Il est facile de voir que les séries

$$(27) \qquad p_1(\sigma - b_\nu, \zeta), \quad p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta)$$

convergent pour

$$|\sigma - b_\nu| < \delta_1,$$

où δ_1 est la distance de b_ν jusqu'à la valeur la plus prochaine $\bar{b}_\nu$, où l'on a

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \ldots = \frac{\partial^{\lambda_1} \varphi}{\partial \tau^{\lambda_1}} = 0.$$

Par conséquent, $\bar{b}_\nu$ est, ou bien une valeur pour laquelle on a

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = 0,$$

ou bien une valeur pour laquelle on a

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0, \qquad \varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0 \qquad (\nu = 2, \ldots, s).$$

En effet, soit b_μ une valeur qui appartient au domaine de convergence des séries (27) et qui ne coïncide pas avec une valeur $\bar{b}_\nu$, on aura

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = [(\tau - a_\mu)^{\lambda_1} + \bar{p}_1(\sigma - b_\mu, \zeta)(\tau - a_\mu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots \\ + \bar{p}_{\lambda_1}(\sigma - b_\mu, \zeta)]. \\ \bar{G}(\tau - a_\mu, \sigma - b_\mu, \zeta), \end{aligned} \right.$$

où a_μ est une racine de l'équation

$$(29) \qquad \varphi_1(\tau, b_\mu) = 0.$$

Mais, pour une valeur de a_μ racine de l'équation (29), les deux équations

$$(\tau - a_\nu)^{\lambda_1} + p_1(\sigma - b_\nu, \zeta)(\tau - a_\nu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots + p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta) = 0,$$
$$(\tau - a_\mu)^{\lambda_1} + \bar{p}_1(\sigma - b_\mu, \zeta)(\tau - a_\mu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots + \bar{p}_{\lambda_1}(\sigma - b_\mu, \zeta) = 0$$

donnent des valeurs identiques de τ, d'où suit qu'il existe des continuations analytiques des séries

$$p_1(\sigma - b_\nu, \zeta), \quad \ldots, \quad p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta)$$

au point $(b_\mu, 0)$. C'est seulement si b_μ coïncide avec un point $\bar{b}_\nu$, qu'il

n'existe pas de continuation analytique. Mais alors le rayon de convergence en $(\sigma - b_\nu)$ est au plus égal à

$$|\bar{b}_\nu - b_\nu|.$$

On peut procéder de la même manière si (a_ν, b_ν) appartient aux points critiques.

Enfin on peut choisir une suite de la forme (17)

$$a_1 b_1, \quad \ldots, \quad a_r b_r,$$

qui nous donne toute la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

et l'on démontre que tout le domaine du point multiple (0, 0, 0) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

est représenté par les domaines des points

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0.$$

Ici il se présente aussi le cas exceptionnel où le point multiple $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ est du même ordre que le point (0, 0, 0) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Cela peut arriver pour un point particulier si les courbes

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

se réduisent à des droites ayant un point commun, et pour tous les points de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

si elle est composée de m droites coïncidentes.

En résumé, nous avons vu que, quelle que soit la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

nous pouvons toujours représenter le domaine du point multiple (0, 0, 0) de la surface algébrique

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

par l'ensemble des domaines d'un certain nombre de points

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

d'une nouvelle surface algébrique

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

où

$$\xi = \tau\zeta, \qquad \eta = \sigma\zeta,$$

et que les points $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ sont ou bien des points simples, ou bien des points multiples qui, sauf dans un cas d'exception, sont d'un ordre *moins* élevé que celui du point primitif. Puis après nous pouvons traiter chaque point multiple

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0)$$

de la même manière, représenter son domaine par les domaines d'un certain nombre de points

$$(a'_\lambda, b'_\lambda, 0)$$

d'une nouvelle surface

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) = 0,$$

et ainsi de suite. Généralement l'ordre des points multiples sera diminué par chaque transformation; mais, comme nous avons vu que, dans un cas d'exception, le point

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

peut être du même ordre que le point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = o,$$

il nous faut démontrer que cela ne peut pas se présenter pour chaque transformation successive, mais qu'après un certain nombre de transformations l'ordre du point multiple sera certainement diminué.

Nous allons suivre exactement la même marche que M. Weierstrass dans le cas correspondant de la théorie des fonctions algébriques d'une seule variable.

Supposons ainsi qu'au point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = o.$$

ou

$$F(u, v, w) = o$$

corresponde un point multiple de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = o,$$

qui soit également d'ordre m. Nous avons

$$F(u, v, w) = \zeta^m \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta),$$

et, d'après (3) et (5),

$$(30) \qquad \begin{cases} u = (\alpha_1 \tau + \beta_1 \sigma + \gamma_1)\zeta, \\ v = (\alpha_2 \tau + \beta_2 \sigma + \gamma_2)\zeta, \\ w = (\alpha_3 \tau + \beta_3 \sigma + \gamma_3)\zeta. \end{cases}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= (u, v, w)_m + (u, v, w)_{m+1} + \ldots \\ &= \zeta_m[(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_m + (\tau, \sigma, \zeta)_\lambda + (\tau, \sigma, \zeta)_{\lambda+1} + \ldots]. \end{aligned}$$

On ne diminue rien de la généralité, en supposant que le point multiple d'ordre m de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = o$$

soit le point (o, o, o), car cela revient à supposer

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_m = 0.$$

L'équation

$$(u, v, w)_m = 0,$$

qui représente, en général, un cône d'ordre m, se décompose dans le cas actuel en m facteurs du premier degré. Dans tous les cas, on peut supposer que deux des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, par exemple γ_2 et γ_3, soient différentes de zéro. En effet, une de ces quantités est toujours différente de zéro; si les deux autres sont égales à zéro, nous faisons une transformation linéaire et homogène

$$u = \bar\alpha_1 u' + \bar\beta_1 v' + \bar\gamma_1 w',$$
$$v = \bar\alpha_2 u' + \bar\beta_2 v' + \bar\gamma_2 w',$$
$$w = \bar\alpha_3 u' + \bar\beta_3 v' + \bar\gamma_3 w',$$

et nous considérons la nouvelle surface

$$\bar{F}(u', v', w') = 0,$$

où le point (o, o, o), également, est un point multiple d'ordre m.

Ensuite, nous posons

$$\tau = (\alpha'_1 \tau_1 + \beta'_1 \sigma_1 + \gamma'_1)\zeta_1,$$
$$\sigma = (\alpha'_2 \tau_1 + \beta'_2 \sigma_1 + \gamma'_2)\zeta_1,$$
$$\zeta = (\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\zeta_1.$$

D'après l'hypothèse, nous aurons

$$\bar\Phi(\tau, \sigma, \zeta) = (\tau, \sigma, \zeta)_m + (\tau, \sigma, \zeta)_{m+1} + \ldots,$$

et ainsi

$$\bar\Phi(\tau, \sigma, \zeta) = \zeta_1^m \Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) = \zeta_1^m [(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)_m + (\tau_1, \sigma_1, \zeta_1)_{\lambda_1} + \ldots.$$

Ici on peut toujours supposer

$$\gamma'_3 \gtrless 0.$$

En effet, pour que l'équation de la surface

$$\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) = 0$$

commence par des termes d'ordre m, il faut que nous ayons

$$(\tau, \sigma, \zeta)_m = \prod_{\lambda=1}^{m} (A_\lambda \tau + B_\lambda \sigma + C_\lambda \zeta),$$

où

$$A_\lambda \gtrless 0, \qquad B_\lambda \gtrless 0,$$

et que γ'_1, γ'_2, γ'_3 annulent tous les facteurs. S'ils sont tous égaux, nous pouvons, évidemment, toujours poser

$$\gamma'_3 \gtrless 0.$$

Dans l'autre cas, pour

$$\gamma'_3 = 0,$$

il faut que

$$A_\lambda = A, \qquad B_\lambda = B \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

et, comme

$$(\tau, \sigma, 0)_m = \varphi(\tau, \sigma) = (u, v, w)_m,$$

que tous les facteurs de $(u, v, w)_m$, soient égaux. Ainsi pour que nous ayons

$$\gamma'_3 = 0,$$

il faut nécessairement que tous les facteurs de $(u, v, w)_m$, soient égaux.

Posons ensuite

$$\sigma = \tau\left(\bar{\sigma} - \frac{A}{B}\right), \qquad \zeta = \tau\bar{\zeta},$$

nous aurons

$$\Phi(\tau, \sigma, \zeta) = \tau^m \Psi(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}),$$

$$\Psi(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}) = \Psi(\bar{\sigma}, \bar{\zeta}) + \tau\overline{\Psi}(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}),$$

où

$$\Psi(\bar{\sigma}, \bar{\zeta}) = \prod_{\lambda=1}^{m} (B\bar{\sigma} + C_\lambda \bar{\zeta}).$$

Enfin, nous prenons la surface

$$\Psi(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}) = 0$$

comme point de départ et posons

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} &= (\alpha'_1 \tau_1 + \beta'_1 \sigma_1 + \gamma'_1)\zeta_1, \\
\bar{\zeta} &= (\alpha'_2 \tau_1 + \beta'_2 \sigma_1 + \gamma'_2)\zeta_1, \\
\tau &= (\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\zeta_1,
\end{aligned}$$

et nous sommes certains que

$$\gamma'_3 \gtrless 0.$$

Ensuite, comme les facteurs de

$$\Psi(\bar{\sigma}, \bar{\zeta})$$

sont différents, nous aurons

$$\gamma''_3 \gtrless 0,$$

et ainsi de suite.

Supposons, maintenant, qu'une suite de transformations nous ait conduit aux surfaces

$$\begin{aligned}
&\overline{\Phi}(\tau,\ \sigma,\ \zeta) = 0, \\
&\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) = 0, \\
&\Phi_2(\tau_2, \sigma_2, \zeta_2) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\Phi_r(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r) = 0,
\end{aligned}$$

où les points multiples correspondants sont tous d'ordre m. Nous allons donner une limite supérieure de r. Exprimons d'abord les variables u, v, w en les variables τ_r, σ_r, ζ_r : on a

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
u &= (\alpha_1 \tau + \beta_1 \sigma + \gamma_1)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\ldots(\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)})\zeta_r, \\
v &= (\alpha_2 \tau + \beta_2 \sigma + \gamma_2)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\ldots(\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)})\zeta_r, \\
w &= (\alpha_3 \tau + \beta_3 \sigma + \gamma_3)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\ldots(\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)})\zeta_r
\end{aligned}\right.$$

où

$$(32)\quad \begin{cases} u = [\gamma_1\gamma_1'\gamma_1''\cdots\gamma_1^{(r)} + (\alpha_1\xi + \beta_1\eta)]\zeta = [\Gamma_1 + (\alpha_1\xi + \beta_1\eta)]\zeta, \\ v = [\gamma_2\gamma_2'\gamma_2''\cdots\gamma_2^{(r)} + (\alpha_2\xi + \beta_2\eta)]\zeta = [\Gamma_2 + (\alpha_2\xi + \beta_2\eta)]\zeta, \\ w = [\gamma_3\gamma_3'\gamma_3''\cdots\gamma_3^{(r)} + (\alpha_3\xi + \beta_3\eta)]\zeta = [\Gamma_3 + (\alpha_3\xi + \beta_3\eta)]\zeta. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons dit, les deux produits

$$\Gamma_2 = \gamma_2 \cdots \gamma_2^{(r)} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_3 = \gamma_3 \cdots \gamma_3^{(r)}$$

sont différents de zéro.

Ensuite,

$$F(u, v, w) = \zeta^n \bar{\Phi}(\xi, \eta, \zeta).$$

En différentiant par rapport à ξ, η et ζ,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\alpha_1\zeta + \frac{\partial F}{\partial v}\alpha_2\zeta + \frac{\partial F}{\partial w}\alpha_3\zeta = \zeta^n \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\beta_1\zeta + \frac{\partial F}{\partial v}\beta_2\zeta + \frac{\partial F}{\partial w}\beta_3\zeta = \zeta^n \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial F}{\partial v}\gamma_2 + \frac{\partial F}{\partial w}\gamma_3 = \zeta^n \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\zeta} + n\zeta^{n-1}\bar{\Phi},$$

d'où résulte

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} = \zeta^{n-1}\chi_1, \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \zeta^{n-1}\chi_2, \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} = \zeta^{n-1}\chi_3, \end{cases}$$

où χ_1, χ_2 et χ_3 sont des fonctions linéaires et homogènes de $\bar{\Phi}$, $\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\eta}$ et $\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\zeta}$.

En procédant de la même manière, on obtient enfin

$$(34)\quad \begin{cases} F = \zeta^m \zeta_1^m \ldots \zeta_r^m \, \Phi_r\,(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} = \zeta^{m-1}\zeta_1^{m-1} \ldots \zeta_r^{m-1}\chi_1^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \zeta^{m-1}\zeta_1^{m-1} \ldots \zeta_r^{m-1}\chi_2^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} = \zeta^{m-1}\zeta_1^{m-1} \ldots \zeta_r^{m-1}\chi_3^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \end{cases}$$

ou, d'après les relations qui existent entre les variables $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_r$,

$$(35)\quad \begin{cases} F = \zeta_r^{m(r+1)} \, f\,(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\Phi_r(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} = \zeta_r^{(m-1)(r+1)} f_1(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\chi_1^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \zeta_r^{(m-1)(r+1)} f_2(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\chi_2^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} = \zeta_r^{(m-1)(r+1)} f_3(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\chi_3^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r). \end{cases}$$

Nous allons nous appuyer sur le théorème suivant :

Soient $\varphi(u)$ *et* $\psi(u)$ *deux fonctions entières et rationnelles de* u *qui n'ont pas de facteur commun, on peut trouver deux autres fonctions entières et rationnelles de* u,

$$L(u) \quad et \quad M(u),$$

de sorte que

$$L(u)\,\varphi(u) + M(u)\,\psi(u) = 1.$$

Les coefficients de $L(u)$ *et de* $M(u)$ *sont des fonctions rationnelles des coefficients de* $\varphi(u)$ *et* $\psi(u)$.

Appliquons ce théorème aux fonctions

$$F(u, v, w) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial u}[F(u, v, w)],$$

qui, considérées comme des fonctions de u, remplissent, évidemment, les conditions exigées.

Ainsi

$$(36)\quad L(u, v, w)\, F(u, v, w) + M(u, v, w)\, \frac{\partial}{\partial u}[F(u, v, w)] = 1.$$

Les fonctions $L(u, v, w)$ et $M(u, v, w)$ sont des fonctions rationnelles de v et w. Soit

$$\chi(v, w)$$

leur dénominateur commun qui, du reste, n'est autre chose que le discriminant de l'équation

$$F(u, v, w) = 0,$$

considérée comme une équation en u. Multiplions les deux membres de l'équation (36) par $\chi(v, w)$, de sorte que le premier membre devienne une fonction entière. On aura donc

$$(37)\quad \overline{L}(u, v, w)\, F(u, v, w) + \overline{M}(u, v, w)\, \frac{\partial}{\partial u}[F(u, v, w)] = \chi(v, w).$$

Soit

$$\chi(v, w) = (v, w)_{\lambda} + (v, w)_{\lambda+1} + \ldots + (v, w)_{n}.$$

En substituant dans l'équation (37) les valeurs de u, v, w exprimées en τ_r, σ_r, ζ_r, le premier membre contient comme facteur au moins

$$\zeta_r^{(r+1)(m-1)},$$

d'après (35), mais le second membre n'en contient que

$$\zeta_r^{\lambda_1}, \qquad n > \lambda_1 \geqq \lambda;$$

car on peut toujours supposer que

$$\chi(\Gamma_2, \Gamma_3) \gtrless 0,$$

$\chi(v, w)$ n'étant pas réductible. Alors

$$(r+1)(m-1) \leqq \lambda_1.$$

Par conséquent, nous avons obtenu une limite supérieure de r ou du nombre de transformations successives qui puissent nous donner un point multiple du même ordre que le point (o, o, o) de la surface

$$F(u, v, w) = 0.$$

Il est évident que le même raisonnement s'applique à une surface quelconque de la suite des surfaces transformées.

Ainsi nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Soit

$$(0, 0, 0)$$

un point multiple d'ordre m de la surface algébrique

$$F(u, v, w) = 0.$$

Par une substitution de la forme

$$u = (\alpha_1 \tau + \beta_1 \sigma + \gamma_1)\zeta,$$
$$v = (\alpha_2 \tau + \beta_2 \sigma + \gamma_2)\zeta,$$
$$w = (\alpha_3 \tau + \beta_3 \sigma + \gamma_3)\zeta,$$

nous faisons correspondre à ce point un certain nombre de points

$$(a_\nu, b_\nu, 0), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

d'une nouvelle surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

de sorte que l'ensemble des domaines des points $(a_\nu, b_\nu, 0)$ représente tout le domaine du point (o, o, o) de la surface

$$F(u, v, w) = 0.$$

Ensuite, nous traitons de la même manière chaque point multiple de la suite

$$(a_\nu, b_\nu, 0), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

et nous parviendrons enfin à un nombre fini de points simples

$$(a_\mu^{(\lambda)}, b_\mu^{(\lambda)}, 0), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r_\lambda)$$

dans un nombre fini de surfaces

$$\Phi_\lambda(\tau_\lambda, \sigma_\lambda, \zeta_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s)$$

dont les domaines, pris ensemble, représentent tout le domaine du point multiple (0, 0, 0) de la surface

$$F(u, v, w) = 0,$$

ou du point (a, b, c) de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Le domaine de chacun de ces points est représenté par une seule série et, par conséquent, tout le domaine du point multiple d'ordre m est représenté par un nombre fini de séries de deux variables auxiliaires.

Ici, le nombre de séries qui sont nécessaires pour représenter le domaine du point multiple d'ordre m de la surface algébrique

$$F(u, v, w) = 0$$

n'est pas fixé, comme dans le cas d'un point multiple d'une courbe algébrique. Nous n'obtenons qu'une limite inférieure. Cela dépend du fait qu'on peut représenter toute la courbe algébrique

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

d'une infinité de manières par un nombre fini de séries.

Jusqu'ici nous avons supposé que le point considéré (a, b, c) de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

fût un point à distance finie. Le cas où les variables deviennent infinies se ramène facilement au cas considéré. Soit

$$c = \infty,$$

on n'a qu'à poser

$$z = \frac{1}{z_1},$$

et l'on étudie le point $(a, b, 0)$ de la surface transformée

$$f_1(x, y, z_1) = 0.$$

Ainsi nous avons vu que le domaine d'un point quelconque de la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

peut être représenté par un nombre fini de séries de deux variables auxiliaires.

Maintenant nous allons démontrer que toute la surface algébrique peut être représentée par un nombre fini de telles séries. Considérons les deux équations

$$(38) \qquad \begin{cases} f(x, y, z)] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}[f(x, y, z)] = 0. \end{cases}$$

En éliminant x entre ces deux équations nous obtenons une certaine courbe algébrique

$$(39) \qquad \psi(y, z) = 0.$$

Pour chaque système de valeurs de y et z,

$$y = b, \qquad z = c,$$

qui n'appartient pas à la courbe (39), on a

$$0 = f(x, y, z) = A_\lambda(x - a_\lambda) + B_\lambda(y - b) + C_2(z - c) + \ldots.$$

où

$$A_\lambda \gtrless 0,$$

et, par conséquent, il existe un développement

$$(40) \qquad x - a_\lambda = p_\lambda(y - b, z - c),$$

qui représente tout le domaine du point

$$(a_\lambda, b, c),$$

et qui converge pour

$$|y-b|<\delta_1, \qquad |z-c|<\delta.$$

Les rayons de convergence δ_1 et δ ne sont, certainement, pas nuls au même temps, c'est-à-dire, δ n'est pas égal à zéro, si δ_1 a été choisi assez petit et *vice versa*.

Fixons ensuite la valeur

$$z=c.$$

A cette valeur $z=c$ correspond un nombre fini de racines de l'équation (39)

$$\psi(y,z)=0,$$

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_r$$

qui sont telles que, pour le système

$$y=b_\lambda, \qquad z=c,$$

il n'existe pas de développements de la forme (40). Ces valeurs correspondent, par conséquent, à des points critiques de la surface

$$f(x,y,z)=0,$$

mais non pas nécessairement à des points multiples. Soit z une valeur dans le voisinage de c

$$|z-c|<\delta,$$

les valeurs correspondantes des racines de l'équation

$$\psi(y,z)=0,$$

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_\lambda, \quad \ldots, \quad y_r$$

sont toutes situées dans le voisinage des valeurs

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_\lambda, \quad \ldots, \quad b_r$$

de sorte qu'on a

$$|y_\lambda-b_\lambda|<\delta_1 \qquad (\lambda=1,2,\ldots,r),$$

où δ_1 tend vers zéro au même temps que δ. Mais, si δ a été choisi assez petit, nous avons vu que le domaine du point critique

$$(a_\lambda^{(\nu)}, b_\lambda, c) \left\{ \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \ldots, m_\lambda, \\ \lambda = 1, 2, \ldots, r \end{array} \right.$$

est représenté par un nombre fini de séries. Ensuite, soit

$$\bar{\delta} < \delta,$$

et soit $\bar{\delta}_1$ la valeur correspondante de δ_1, on a

$$\bar{\delta}_1 < \delta_1.$$

Appelons C_λ et $\overline{C}_\lambda$ les cercles qu'on décrit autour du point b_λ comme centre avec les rayons δ_1 et $\bar{\delta}_1$. Pour chaque valeur

$$y = b,$$

au dehors des cercles C_λ, il existe un développement

$$x - a_\lambda = p_\lambda(y - b, z - c)$$

qui converge pour

$$|z - c| < \bar{\delta}$$

et dont le cercle de convergence des y soit A. D'après ce que nous avons dit, le cercle A est au moins tangent au cercle $\overline{C}_\lambda$ le plus prochain. Les cercles $\overline{C}_\lambda$ étant situés dans l'intérieur des cercles C_λ, il s'ensuit qu'on peut couvrir tout le plan des y par les cercles C_λ et un nombre *fini* des cercles A. Les valeurs infinies de y appartiennent ou bien au domaine d'un point critique, ou bien au domaine de convergence d'une série de la forme (40).

Ainsi tous les points de la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0;$$

pour lesquels

$$|z - c| < \bar{\delta}$$

sont donnés par un nombre *fini* de séries. Ensuite, il suffit de choisir un nombre *fini* de points c du plan des z, pour que leurs domaines $\overline{\delta}$ couvrent tout le plan des z. En effet, toutes les valeurs de z au dehors d'un certain cercle de rayon,

$$R = \frac{1}{\overline{\delta}},$$

appartiennent au domaine du point $z = \infty$. Alors il ne reste qu'une partie finie du plan à couvrir de cercles, dont les rayons sont différents de zéro. Il est évident qu'il suffit d'un nombre fini.

Enfin, à chaque point c correspond un nombre fini de séries et, comme le nombre des points c est fini, un nombre *fini* de séries de deux variables auxiliaires nous donnent toute la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

Les considérations précédentes reposent sur le fait qu'une courbe algébrique quelconque

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

peut être représentée, entièrement, par un nombre *fini* de séries d'une variable auxiliaire.

Ayant obtenu un résultat analogue pour une surface algébrique quelconque, nous pouvons l'employer pour démontrer le même théorème pour une hypersurface algébrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

et ainsi de suite. Nous pouvons donc énoncer le théorème général :

Une hypersurface algébrique quelconque de $(n+1)$ *variables*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$$

peut toujours être représentée par un nombre fini *de séries de* n *variables auxiliaires.*

Recherches sur la convergence des intégrales définies;

Par M. C.-J. de la VALLÉE-POUSSIN,
Chargé de Cours à l'Université de Louvain.

PRÉLIMINAIRE.

Le présent Mémoire fait suite à celui que nous venons de publier dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles : Sur les intégrales à limites infinies*.

Cette Société avait mis au concours la question suivante :

Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.

Nous avons montré que cette question se ramène à l'inversion des signes d'intégration dans les intégrales doubles, et nous avons donné, à ce sujet, des règles précises dans le cas où la fonction sous le signe est continue et la limite supérieure de l'intégrale infinie.

Les méthodes que nous avons appliquées dans cette hypothèse particulièrement simple, peuvent être généralisées et servir à résoudre le cas plus difficile où la fonction est discontinue. Néanmoins, cette généralisation n'est pas immédiate, une première tentative que nous

avions faite pour y arriver ne nous avait pas conduit à des résultats définitifs. Qu'il nous soit donc permis d'exprimer notre vive gratitude à M. C. Jordan, membre de l'Institut de France, pour l'intérêt qu'il a pris à nos recherches et les conseils éclairés qu'il nous a donnés. En énonçant, sous des conditions précises, le théorème du n° **63**, cet éminent géomètre nous a ouvert la voie, et c'est par des généralisations successives, dans cette direction qui nous était donnée, que nous sommes arrivé à la conception du Mémoire actuel.

INTRODUCTION.

I. — Notions sur les ensembles.

1. Une collection de nombres, compris entre certaines limites, ou de points situés sur une droite, constitue ce que nous appelons un *ensemble*.

2. Supposons que l'ensemble E renferme un nombre infini d'éléments; on dira que le point x est un *point limite* de l'ensemble, si, quelque petit que soit α, il existe une infinité de points de l'ensemble dans l'intervalle $(x-\alpha, x+\alpha)$.

Les points limites de E forment eux-mêmes un ensemble E_1, que l'on appelle *ensemble dérivé* de E. Cet ensemble, à son tour, peut avoir un ensemble dérivé E^2, et ainsi de suite.

Si E n'a qu'un nombre limité d'ensembles dérivés successifs, il est de *première espèce*, et il est de *seconde espèce* dans le cas contraire.

3. Un ensemble de première espèce est de *l'ordre n*, s'il a n ensembles dérivés successifs; et un point limite est de l'ordre p, s'il appartient à l'ensemble E^p, sans appartenir aux ensembles dérivés suivants.

Soit E un ensemble de l'ordre m et E′ un ensemble de l'ordre

n ($n < m$). L'ensemble des points qui appartiennent à la fois à E ou à E′ est un nouvel ensemble (E + E′). On voit aisément que, si x est un point limite de l'ordre p pour E et de l'ordre q pour E′, l'ordre de x dans l'ensemble (E + E′) est égal au plus grand des deux nombres p ou q. Donc, si $m > n$, l'ordre de l'ensemble (E + E′) sera m.

4. Les ensembles se partagent encore en deux classes à un autre point de vue et cette distinction est très importante.

Supposons que tous les points de l'ensemble soient compris dans l'intervalle (a, b), et divisons cet intervalle en un nombre indéfiniment croissant d'éléments qui tendent vers zéro. Si la somme de ceux qui renferment des points de l'ensemble tend vers zéro, nous dirons que l'ensemble est *résoluble* ou de longueur nulle; il sera *linéaire* ou *étendu* dans le cas contraire.

On reconnaît facilement que tout ensemble de première espèce est résoluble, mais la réciproque n'est pas vraie.

5. Au lieu de considérer des points sur une droite, on peut considérer un ensemble de points dans une aire donnée T. Il y a lieu d'étendre à ces nouveaux ensembles la distinction qui précède. Divisons l'aire T en un nombre indéfiniment croissant d'éléments qui tendent vers zéro dans tous les sens; si la somme de ceux qui renferment des points de l'ensemble tend vers zéro, l'ensemble sera dit *résoluble* ou d'aire nulle; il sera *étendu* dans le cas contraire.

II. — Rappel de quelques principes de la théorie des fonctions.

6. Lorsqu'une fonction y de x reste comprise entre deux nombres donnés, quand x varie dans un intervalle ab, on dit qu'elle est *limitée* dans cet intervalle. Elle est *illimitée,* dans le cas contraire.

Une fonction limitée dans un intervalle a, dans cet intervalle, une *limite supérieure* L et une *limite inférieure* l; la différence $L - l$ est l'*oscillation* de la fonction dans l'intervalle.

Si l'oscillation dans l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tend vers zéro avec ε, la fonction est *continue* pour cette valeur de x. Dans le cas opposé,

elle est discontinue, et la limite (nécessairement déterminée) de l'oscillation dans l'intervalle infiniment petit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ s'appelle la *discontinuité* au point x. Si la fonction est illimitée dans l'intervalle $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ quel que soit ε, la discontinuité au point x est infinie.

7. Ces définitions s'étendent aisément à des fonctions de plusieurs variables. En particulier, pour une fonction de deux variables, on appellera *discontinuité* au point (x, y) la limite de l'oscillation de la fonction dans une aire infiniment petite décrite autour de ce point.

8. *Intégrales simples.* — Soit $f(x)$ une fonction limitée dans un intervalle ab; divisons cet intervalle en un nombre indéfiniment croissant de parties δ_i; désignons par L_i et l_i les limites supérieures et inférieures de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i; on sait que les deux sommes

$$\Sigma L_i \delta_i, \quad \Sigma l_i \delta_i$$

tendront vers des limites déterminées et invariables quand tous les δ_i tendront vers zéro.

Si ces deux limites sont égales, leur valeur commune est aussi, par définition, celle de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

on dit alors que $f(x)$ est *intégrable*.

Si ces deux limites de sommes sont différentes, la fonction $f(x)$ n'est pas intégrable, et l'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a une valeur indéterminée entre les deux limites précédentes.

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit intégrable est que la somme des intervalles δ_i où l'oscillation de $f(x)$ est supérieure à un nombre donné tende vers zéro quand tous les intervalles tendent vers zéro.

Cette proposition équivaut à celle-ci :

Il faut et il suffit que l'ensemble des points où la discontinuité de $f(x)$ surpasse un nombre donné soit résoluble (4).

L'équivalence des deux énoncés est une conséquence évidente du théorème suivant :

Si, dans l'intervalle δ, $f(x)$ n'a que des discontinuités inférieures à η, on peut subdiviser δ en parties assez petites pour que, dans chacune d'elles, l'oscillation de f soit moindre que $\eta + \varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on veut.

Intercalons, en effet, indéfiniment de nouveaux points de subdivision entre a et b; s'il restait toujours un ou plusieurs intervalles où l'oscillation de f surpassât $\eta + \varepsilon$, les limites du *premier vers la gauche* de ces intervalles convergeraient vers un point fixe (car la limite gauche serait nécessairement constante ou croissante), et en ce point la discontinuité serait supérieure à $\eta + \varepsilon$, ce qui est contre l'hypothèse.

9. *Intégrales doubles.* — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y dans une aire déterminée T; divisons cette aire en un nombre indéfiniment croissant d'éléments ω_i qui tendent vers zéro dans tous les sens, et soient L_i et l_i les limites supérieures ou inférieures de f dans l'élément ω_i; les deux sommes

$$\Sigma L_i \omega_i, \quad \Sigma l_i \omega_i$$

tendront vers des limites déterminées et invariables quand tous les ω_i tendront vers zéro. Si ces limites sont égales, leur valeur commune est celle de l'intégrale double

$$\int_T f(x, y)\, dT = \int_T f(x, y)\, dx\, dy;$$

on dit alors que f est intégrable dans l'aire T.

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable

dans l'aire T *est que la somme de tous les éléments* ω_i, *où l'oscillation de f surpasse un nombre donné, tende vers zéro.*

Cette proposition équivaut encore à celle-ci :

Il faut et il suffit que l'ensemble des points de l'aire T *où la discontinuité de f surpasse un nombre donné soit résoluble* (3).

10. Soit T une aire limitée par un contour C. Pour plus de simplicité, admettons qu'une parallèle à l'axe des x ne puisse rencontrer le contour qu'en deux points, et que les abscisses x_1 et x_2 de ces deux points soient des fonctions continues de y dans l'intervalle cd (correspondant aux valeurs extrêmes de y dans l'aire T).

On peut démontrer que, si $f(x, y)$ *est intégrable dans l'aire* T, *l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

sera une fonction intégrable de y *et que l'on aura*

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\,d\mathrm{T} = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

[*Voir*, par exemple, P. du Bois-Reymond, *Math. Ann.*, t. XI; — Harnack, *Die Elemente der differential und Integral-Rechnung;* et tout récemment, C. Jordan, *Remarques sur les intégrales définies* (*Journal de Liouville,* 1892.)]

CHAPITRE I.

CONVERGENCE ABSOLUE.

I. — Convergence absolue des intégrales simples.

11. Jusqu'à présent, une intégrale définie n'a de signification que si la fonction sous le signe est limitée. Nous allons généraliser cette notion et l'étendre aux fonctions illimitées; mais il y a lieu de distinguer deux cas très différents suivant que l'intégrale est *absolument* ou n'est que *relativement* convergente : nous nous occuperons d'abord du premier.

12. Considérons un intervalle ab des valeurs de x et une fonction $f(x)$ intégrable dans toute portion de l'intervalle ab où elle est limitée. Appelons, pour abréger, *infini* tout point où la discontinuité (**6**) de f est infinie, et supposons que l'ensemble des infinis soit *résoluble* (**4**) dans l'intervalle ab.

13. Soient N_1 et N_2 deux nombres positifs quelconques; substituons à la fonction $f(x)$ la fonction *limitée* $f_n(x)$ définie par les relations

$$f_n = -N_1, \qquad \text{pour} \qquad f \leqq -N_1;$$
$$f_n = f, \qquad \text{pour} \qquad -N_1 < f < N_2;$$
$$f_n = N_2 \qquad \text{pour} \qquad f \geqq N_2.$$

La fonction $f_n(x)$ n'aura de discontinuité supérieure à un nombre donné qu'en des points formant un ensemble résoluble, et comme elle est limitée, elle sera intégrable; si l'intégrale

$$\int_a^b f_n(x)\,dx$$

tend vers une limite déterminée, quand N_1 et N_2 tendent vers l'infini

d'une manière quelconque, nous dirons que l'intégrale

$$\int_a^b f\,dx$$

est *absolument convergente* et a cette limite pour valeur.

Une intégrale absolument convergente jouit des propriétés que nous allons signaler.

14. I. *Si l'intégrale* $\int_a^b f\,dx$ *est absolument convergente, l'intégrale* $\int_a^b \operatorname{mod} f\,dx$ *l'est aussi.*

C'est ce qui résulte de ce que N_1 et N_2 (**13**) peuvent tendre successivement vers l'infini.

15. II. *Si l'on divise ab en intervalles indéfiniment décroissants par les points* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots,$ *une somme d'intégrales*

$$\sum \operatorname{mod} \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+1} f\,dx,$$

prises dans un nombre quelconque (même indéfiniment croissant) d'intervalles arbitrairement choisis, tendra vers zéro, pourvu que la somme des intervalles tende vers zéro.

Prenons N_1 et N_2 assez grands pour qu'on ait

$$\int_a^b \operatorname{mod} f\,dx < \int_a^b \operatorname{mod} f_n\,dx + \varepsilon,$$

ce qui est possible d'après le numéro précédent; on aura *a fortiori*

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx < \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f_n\,dx + \varepsilon;$$

et, comme la somme du second membre tend vers zéro,

$$\lim \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx < \varepsilon,$$

d'où l'on conclut

$$\lim \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx = 0.$$

III. *L'intégrale* $\int_a^x f\,dx$ *est une fonction continue de* x. (Cas particulier du théorème II.)

IV. *L'intégrale* $\int_a^x f\,dx$ *est une fonction à variation limitée dans l'intervalle ab.*

En effet, sa variation totale est égale à $\int_a^b \operatorname{mod} f\,dx$.

16. V. *Si l'on divise ab en intervalles indéfiniment décroissants par les points* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$, *la somme d'intégrales*

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f\,dx$$

tendra vers l'intégrale prise entre a et b, pourvu que la somme des intervalles $(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ *tende vers* $(b - a)$.

Conséquence du théorème II.

En particulier, la somme des intégrales prises dans tous les intervalles où la fonction est limitée tendra vers l'intégrale prise entre a et b.

17. VI. *Réciproquement, si la somme*

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\,dx$$

n'augmente pas indéfiniment, quand la somme $\Sigma(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ *des intervalles correspondants tend vers* $(b - a)$, *l'intégrale sera absolument convergente.*

Soit en effet f_n (**15**) la fonction correspondant aux nombres N_1

et N_2 : considérons un mode de subdivision de ab en intervalles assez petits, pour que la somme de ceux qui sont exclus de la somme Σ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{N_1+N_2}$; on aura

$$\int_a^b \operatorname{mod} f_n\, dx = \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f_n\, dx + \sum' \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \operatorname{mod} f_n\, dx,$$

la somme Σ' s'étendant aux intervalles exclus de la somme Σ.

Mais on a

$$\sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f_n\, dx \leqq \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\, dx,$$

$$\sum' \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \operatorname{mod} f_n\, dx < (N_1+N_2)\frac{\varepsilon}{N_1+N_2} < \varepsilon$$

et, par conséquent,

$$\int_a^b \operatorname{mod} f_n\, dx < \sum \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \operatorname{mod} f\, dx + \varepsilon.$$

Le premier membre est constamment croissant avec N_1 et N_2, et, comme il ne peut croître indéfiniment, l'intégrale $\int_a^b f\,dx$ est absolument convergente.

18. VII. *Si l'ensemble des infinis est de première espèce* (**2**), *et si* $F(x)$ *est une fonction continue qui a* $f(x)$ *pour dérivée, pour toute valeur de* x *les infinis exceptés, dans l'intervalle* ab, *on aura la relation*

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

S'il n'y a qu'un nombre limité d'infinis $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a sans difficulté

$$\int_a^{a_1-\varepsilon} + \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon} + \ldots + \int_{a_n+\varepsilon}^{b} f\,dx$$
$$= F(b) - F(a) + \Sigma[F(a_i+\varepsilon) - F(a_i-\varepsilon)],$$

et F étant continue, la somme Σ tend vers zéro avec ε, ce qui entraîne le théorème.

S'il n'y a dans l'ensemble des infinis qu'un nombre déterminé de points limites du premier ordre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$, nous venons de justifier l'équation

$$\int_a^{\alpha_1-\varepsilon} + \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\varepsilon} + \ldots + \int_{\alpha_n+\varepsilon}^{b} f\,dx$$
$$= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) + \Sigma[\mathrm{F}(\alpha_i+\varepsilon) - \mathrm{F}(\alpha_i-\varepsilon)].$$

La somme Σ tendant vers zéro avec ε, la démonstration s'étend à ce second cas, et ainsi de suite jusqu'aux points limites de l'ordre le plus élevé.

Mais si l'ensemble des infinis de f est de *deuxième espèce*, la continuité de F ne paraît plus suffisante pour justifier l'équation (1), et il faut, en outre, pouvoir démontrer que la somme des oscillations de F, dans autant d'intervalles que l'on veut, tend vers zéro, avec la somme de ces intervalles.

19. *Convergence dans le cas où la limite supérieure de l'intégrale est infinie.* — Dans ce cas, il faut encore définir l'intégrale. Si l'intégrale

$$\int_a^{\mathrm{N}} \operatorname{mod} f\,dx$$

n'augmente pas indéfiniment avec N, elle tendra vers une limite déterminée quand N tendra vers l'infini, et il en sera de même pour l'intégrale

$$\int_a^{\mathrm{N}} f\,dx.$$

La limite de cette expression est alors, par définition, la valeur de l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f\,dx,$$

et celle-ci est *absolument convergente.*

II. — Convergence des intégrales doubles.

20. Soit $f(x, y)$ une fonction que nous supposerons *intégrable* dans toute portion de l'aire T où elle est limitée. Appelons encore, pour abréger, *infini* tout point où la discontinuité (**7**) de $f(x, y)$ est infinie, et supposons que l'ensemble de ces infinis soit *résoluble* (ou d'aire nulle) (**5**).

Soient N_1 et N_2 deux nombres positifs quelconques; posons

$$f_n = -N_1, \quad \text{pour} \quad f < -N_1;$$
$$f_n = f, \quad \text{pour} \quad -N_1 \leqq f \leqq N_2;$$
$$f_n = N_2, \quad \text{pour} \quad f > N_2.$$

Substituons à f la fonction *limitée* f_n; celle-ci sera intégrable dans l'aire T, car l'ensemble des points où la discontinuité surpasse un nombre donné sera résoluble; si l'intégrale

$$\mathbf{S}_T f_n \, dT$$

tend vers une limite déterminée quand N_1 et N_2 tendent vers l'infini d'une manière quelconque, nous dirons que l'intégrale double

$$\mathbf{S}_T f \, dT$$

existe et a cette limite pour valeur. Dans le cas contraire, nous n'accorderons, dans cette étude, aucun sens à l'intégrale double.

L'intégrale double, quand elle existe, jouit de propriétés importantes, analogues à celles que nous avons signalées pour les intégrales simples et qui se démontrent par la même voie : nous nous contenterons de les énoncer.

21. I. *Si l'intégrale* $\mathbf{S}_T f \, dT$ *existe, l'intégrale* $\mathbf{S}_T \operatorname{mod} f \, dT$ *existe aussi.*

22. II. *Si l'on divise l'aire* T *en un nombre indéfiniment croissant d'éléments* ω_i *qui décroissent indéfiniment dans tous les sens, une somme*

$$\sum \mathrm{mod} \int_{\omega} f\,d\omega_i$$

d'intégrales prises dans un nombre quelconque (même indéfiniment croissant) d'éléments ω_i *tendra vers zéro, pourvu que la somme de ces éléments tende vers zéro.*

23. III. *Si l'on représente par* T′ *un domaine formé d'un nombre variable d'éléments* ω *de l'aire* T, *l'intégrale*

$$\int_{T'} f\,dT'$$

tendra vers l'intégrale prise dans l'aire T, *pourvu que* T′ *tende vers* T.

En particulier, si, pour un mode de subdivision donné, T′ comprend tous les éléments de T où f est limité, et si l'on fait tendre T′ vers T, l'intégrale prise dans le domaine T′ tendra vers l'intégrale prise dans l'aire T.

24. *Changement de variables.* — Effectuons sur x et y le changement de variables

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

et supposons que cette transformation établisse une correspondance uniforme entre les points d'une aire T dans le plan (x, y) et ceux d'une aire T′ dans le plan (u, v). Pour cela, le déterminant fonctionnel

$$J = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

sera fonction continue de u et de v et ne pourra s'annuler.

Cela posé, on sait que si $f(x, y)$ est fini et intégrable dans l'aire T, on a la formule de transformation

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, dx\, dy = \mathbf{S}_{\mathrm{T}'} f(\varphi, \psi) \operatorname{mod} \mathrm{J}\, du\, dv.$$

Cette formule subsiste quand $f(x, y)$ est illimité, pourvu que l'intégrale double existe, car on a toujours sans difficulté

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f_n(x, y)\, dx\, dy = \mathbf{S}_{\mathrm{T}'} f_n(\varphi, \psi) \operatorname{mod} \mathrm{J}\, du\, dv,$$

et à la limite ces deux intégrales tendent par définition vers les deux intégrales dont nous voulons prouver l'égalité.

Cette méthode s'étend d'elle-même à des intégrales multiples quelconques et il est inutile de nous y arrêter.

25. *Convergence des intégrales doubles dans un champ qui s'étend à l'infini.* — Supposons que l'aire T s'étende à l'infini, et désignons par T′ un domaine limité mais variable qui embrasse successivement tous les points de l'aire T; si l'intégrale

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}'} f\, d\mathrm{T}'$$

tend encore vers une limite déterminée quand T′ tend vers T d'une manière quelconque, l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

existera encore et aura, par définition, cette limite pour valeur.

D'après ce qui précède, on reconnaît aisément que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'intégrale

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}'} \operatorname{mod} f\, d\mathrm{T}'$$

n'augmente pas indéfiniment quand T′ tend vers T.

Si cela a lieu, les propriétés II et III qui précèdent subsisteront pour un champ infini; et il en sera de même des règles relatives aux changements de variables (**24**), pourvu que les conditions imposées à J soient vérifiées en tout point (x, y) de l'aire T (**24**).

III. — Convergence uniforme et convergence régulière. Réduction des intégrales doubles.

26. Considérons une aire T, limitée par un contour C. Supposons, pour simplifier, que ce contour ne soit rencontré qu'en deux points par une parallèle à l'axe des x ou à celui des y. Soient $x_1 = \varphi_1(y)$ et $x_2 = \varphi_2(y)$ les abscisses des points d'intersection du contour par une parallèle à l'axe des x, c et d les valeurs extrêmes de y dans l'aire T: de même, $y_1 = \psi_1(x)$, $y_2 = \psi_2(x)$ les ordonnées des points d'intersection du contour par une parallèle à l'axe des y, a et b les valeurs extrêmes de x dans l'aire T.

27. Soit $f(x,y)$ une fonction des variables x et y dans l'aire T: nous la supposons *intégrable* dans toute portion de l'aire où elle est limitée. Nous appelons encore *infini* de f tout point où la discontinuité de f est infinie (**7**), et nous supposons que l'ensemble des infinis est *résoluble* dans l'aire T (**5**).

28. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f\,dx;$$

on peut l'envisager comme une fonction de y dans l'intervalle cd.

Soit ε un nombre donné; si, quelque petit que soit ε, on peut prendre N_1 et N_2 assez grands pour qu'on ait, f_n étant défini comme au n° **20**,

$$\int_{x_1}^{x} \operatorname{mod} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\,dx + R,$$

$$R < \varepsilon,$$

quelle que soit la valeur de y dans l'intervalle cd, l'intégrale I sera

absolument et *uniformément convergente* dans l'intervalle *cd*. Nous exprimerons ces deux choses, en disant simplement que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

est *équiconvergente* dans l'intervalle *cd* ou dans l'aire T.

29. Donnons-nous encore arbitrairement ε, si, quelque petit que soit ce nombre, on peut vérifier la condition

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx + \mathrm{R},$$
$$\mathrm{R} < \varepsilon,$$

pour une valeur convenable de N_1 et de N_2 dans toute portion *déterminée* de l'intervalle *cd* qui ne renferme aucun point d'un ensemble *résoluble* E_ε (cet ensemble pouvant, en général, varier avec ε), l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

sera dite *régulièrement convergente* dans l'intervalle *cd* ou dans l'aire T.

En particulier, l'intégrale I sera régulièrement convergente, si elle est équiconvergente dans toute portion de l'intervalle *cd* qui ne renferme aucun point d'un ensemble déterminé et résoluble dans cet intervalle.

30. *Si, pour toute valeur de y, l'ensemble des infinis de f* (**27**) *est de première espèce dans l'intervalle* $x_1 x_2$, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

soit équiconvergente est que l'on puisse, ε étant donné, prendre δ

assez petit pour vérifier les inégalités

$$\int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f\, dx < \varepsilon, \qquad \int_{x}^{x+\delta} \operatorname{mod} f\, dx < \varepsilon,$$

pour tout point (x, y) *de l'aire* T. *En un point du contour, on ne tient compte que de l'intégrale qui est prise vers l'intérieur de l'aire.*

Cette condition est nécessaire, car si l'intégrale est équiconvergente, on peut prendre N_1 et N_2 assez grands pour avoir

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx < \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx + \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$\int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f\, dx < \int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f_n\, dx + \varepsilon,$$

puis δ assez petit pour avoir

$$\int_{x-\delta}^{x} \operatorname{mod} f\, dx < 2\varepsilon.$$

On démontrerait de même que l'on peut vérifier la seconde inégalité

$$\int_{x}^{x+\delta} \operatorname{mod} f\, dx < 2\varepsilon.$$

Il reste à démontrer que cette condition est suffisante. Supposons d'abord que, pour chaque valeur de y, les infinis soient en nombre limité dans l'intervalle $x_1 x_2$. Tout point qui n'est pas un infini est nécessairement à distance finie d'un infini; par conséquent, on peut, dans notre hypothèse, assigner une limite supérieure au nombre d'infinis situés sur une même parallèle à l'axe des x, et l'on peut dès lors raisonner comme s'il ne pouvait y en avoir plus d'un. Faisons cette hypothèse; il est clair qu'en joignant successivement par une droite (s'ils sont séparés) tous les infinis consécutifs qui correspondent à des valeurs croissantes de y, on tracera une ligne continue qui contiendra tous les

infinis et ne sera rencontrée qu'en un point par une parallèle à l'axe des x. Soit $x_0 = \varphi(y)$ l'équation de cette ligne; admettons pour simplifier que le point (x_0, y) soit toujours intérieur à T; on aura

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx = \int_{x_1}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx + \mathrm{R},$$
$$\mathrm{R} < \varepsilon.$$

Mais, dans le second membre, f est une fonction limitée sous le signe d'intégration; on peut donc prendre N_1 et N_2 assez grands pour que l'on ait

$$\int_{x_1}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx < \int_{x_1}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx + \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx < \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx + 2\varepsilon,$$

ce qu'il fallait établir.

S'il y a des valeurs de y auxquelles correspondent un nombre illimité d'infinis, on commencera par supposer que l'ensemble des infinis situés sur une même parallèle à l'axe des x ne puisse avoir qu'un nombre limité de points limites. On peut alors recommencer pour ceux-ci le raisonnement qui précède, et ainsi de suite.

51. Lemme. — *Si l'on peut prendre* N_1 *et* N_2 *assez grands pour vérifier, dans tout l'intervalle cd, les relations*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx + \mathrm{R},$$
$$\mathrm{R} < \alpha,$$

l'intégrale double $\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$ *existera, et l'intégrale, déterminée ou non* (**8**).

$$\int_c^d dy \int_x^{x_2} f\, dx$$

sera comprise entre les limites

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T} \pm \alpha(d-c).$$

L'intégrale double existera, car on aura

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} \operatorname{mod} f_n\, d\mathrm{T} = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f_n\, dx < (d-c) \max. \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx,$$

et le premier membre, ne pouvant croître indéfiniment, tendra vers une limite déterminée quand N_1 et N_2 tendront vers l'infini. On a alors $(\operatorname{mod} R' < R)$

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f_n\, dx + \int_c^d R'\, dy$$

et, en faisant tendre N_1 et N_2 vers l'infini,

$$\lim \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f_n\, dx = \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T},$$

$$\lim \left[\operatorname{mod} \int_c^d R'\, dy\right] < \lim \int_e^d \operatorname{mod} R'\, dy < \alpha(d-c),$$

ce qu'il fallait prouver.

32. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f(x,y)\, dx$$

est régulièrement convergente (**29**) *et représente une fonction limitée de y dans l'intervalle cd, l'intégrale double*

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

sera déterminée, en vertu du lemme précédent, et l'on aura

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T} = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx.$$

Subdivisons l'intervalle cd en éléments indéfiniment décroissants et l'aire T en bandes correspondantes par des parallèles à l'axe des x d'ordonnées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots$, et donnons-nous une valeur de ε; la somme

$$\sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\, dx$$

des intégrales prises dans tous les intervalles $\beta_i\beta_{i+1}$ qui ne contiennent aucun point de l'ensemble E_ε (**29**) est comprise, d'après le lemme précédent, entre les limites

$$\mathbf{S}_{T'} f\, dT' \pm \varepsilon(d-c),$$

le domaine T' étant formé de l'ensemble des bandes intérieures à T qui correspondent aux mêmes intervalles.

Mais, puisque l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f\, dx$ est limitée, et que la somme des intervalles $\beta_i\beta_{i+1}$ tend vers $d-c$, les deux expressions

$$\lim \sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx, \qquad \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx$$

ont la même signification; d'autre part, puisque l'intégrale double existe,

$$\lim \mathbf{S}_{T'} f\, dT' = \mathbf{S}_T f\, dT;$$

donc l'intégrale

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx$$

est comprise entre les limites

$$\mathbf{S}_T f\, dT \pm \varepsilon(d-c),$$

et comme ε est aussi petit que l'on veut, le théorème est démontré.

33. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\mathrm{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}$$

a une valeur déterminée, et si l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd, l'intégrale simple

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx$$

sera absolument convergente, et l'on aura

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx = \mathrm{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T}.$$

Reprenons le mode de subdivision de l'intervalle *cd* et de l'aire T de la démonstration précédente; la somme

$$\sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f\, dx$$

des intégrales prises dans les intervalles où $\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx$ est limitée est égale, comme nous venons de le voir, à l'intégrale double

$$\mathrm{S}_{\mathrm{T}'} f\, d\mathrm{T}',$$

le domaine T′ étant formé des bandes qui correspondent aux intervalles précédents dans l'intérieur de T.

Or on a aussi par le même théorème (32)

$$\sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \operatorname{mod} \int_{x_1}^{x_2} f\, dx \overline{\overline{<}} \sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\, dx = \mathrm{S}_{\mathrm{T}'} \operatorname{mod} f\, d\mathrm{T}'.$$

L'intégrale double existant par hypothèse, la somme du premier membre est limitée, et, par conséquent, l'intégrale

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

est absolument convergente (**17**).

Cette intégrale étant absolument convergente, et l'intégrale double existant, on aura (**16-25**)

$$\lim \sum \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx,$$

$$\lim \mathrm{S}_{\mathrm{T}'} f\,d\mathrm{T}' = \mathrm{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T},$$

et, par conséquent,

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \mathrm{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T},$$

ce qu'il fallait prouver.

De là le théorème important :

34. Théorème. — *Les trois intégrales*

$$\int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx, \quad \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy, \quad \mathrm{S}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T}$$

seront déterminées et égales, si les deux intégrales simples

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{mod} f\,dx, \quad \int_{y_1}^{y_2} \operatorname{mod} f\,dy$$

sont régulièrement convergentes et l'intégrale double déterminée dans l'aire T.

35. *Remarque.* — Les nos **24** et **34** contiennent tout ce qui est

nécessaire pour le calcul et la transformation des intégrales doubles dans une aire déterminée.

VI. — Extension des théorèmes précédents au cas où l'aire s'étend à l'infini.

56. Deux cas principaux peuvent se présenter : l'aire T s'étend à l'infini dans le sens des x seulement, ou bien dans le sens des deux axes.

57. Traitons d'abord le premier cas et supposons pour simplifier que l'aire T, limitée par une parallèle à l'axe des y : $x = a$ et deux parallèles à l'axe des x : $y = c$, $y = d$, s'étende à l'infini dans le sens des x positifs.

Si le contour de l'aire était curviligne, on pourrait ramener le problème au précédent : on supposerait la fonction f nulle en dehors de l'aire T et l'on prendrait comme nouveau champ d'intégration une portion du plan contenant l'aire T et limitée par des parallèles aux axes.

58. L'intégrale $\int_a^\infty \operatorname{mod} f(x, y)\, dx$ sera dite *équiconvergente* dans l'intervalle cd, si l'intégrale

$$\int_a^{\mathrm{N}} \operatorname{mod} f(x, y)\, dx$$

est équiconvergente pour toute valeur de N, et si, pour une valeur arbitrairement donnée de ε, on peut prendre N assez grand pour qu'on ait

$$\int_{\mathrm{N}}^{\infty} \operatorname{mod} f\, dx < \varepsilon,$$

quelle que soit la valeur de y dans l'intervalle considéré.

59. Si l'intégrale

$$\int_a^{\mathrm{N}} \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente, quel que soit N; et si, pour toute valeur arbitrairement donnée de ε, on peut vérifier la condition

$$\int_{N}^{\infty} \operatorname{mod} f\, dx < \varepsilon$$

pour une valeur convenable de N, dans toute portion déterminée de l'intervalle cd ne contenant aucun point d'un ensemble résoluble E_ε (dont la composition peut en général dépendre de ε), l'intégrale

$$\int_{a}^{\infty} \operatorname{mod} f\, dx$$

sera encore dite *régulièrement convergente* dans l'intervalle cd.

40. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int_{a}^{\infty} \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd et représente une fonction limitée de y dans cet intervalle, l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{T} f\, dT$$

existe et l'on a

$$\mathbf{S}_{T} f\, dT = \int_{c}^{d} dy \int_{a}^{\infty} f\, dx.$$

La démonstration se fait comme aux nos **31** et **32**.

41. Théorème. — *Si, en outre des conditions du théorème précédent, l'intégrale*

$$\int_{c}^{d} f\, dy$$

est régulièrement convergente dans un intervalle (a, N) *arbitraire, on aura*

$$\int_{c}^{d} dy \int_{a}^{\infty} f\, dx = \int_{a}^{\infty} dx \int_{c}^{d} f\, dy.$$

Soit T′ la portion de T limitée par la droite $x = N$, on aura toujours (**33**)

$$\mathbf{S}_{T'} f\,dT' = \int_a^N dx \int_c^d f\,dy,$$

et, en faisant tendre N vers l'infini,

$$\mathbf{S}_{T} f\,dT = \int_a^\infty dx \int_c^d f\,dy,$$

et c'est ce qu'il faut prouver si l'on se reporte au théorème précédent.

42. Théorème. — *Si l'intégrale double*

$$\mathbf{S}_{T} f\,dT$$

existe, et si l'intégrale simple

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\,dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd, l'intégrale

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f\,dx$$

sera absolument convergente et l'on aura encore

$$\mathbf{S}_{T} f\,dT = \int_c^d dy \int_a^\infty f\,dx.$$

La démonstration se fait comme au nº **33**.

De là le théorème :

43. Théorème. — *Les trois intégrales*

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f\,dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^d f\,dy, \quad \mathbf{S}_{T} f\,dT$$

seront déterminées et égales, si l'intégrale

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle cd, l'intégrale

$$\int_c^d \operatorname{mod} f\, dy$$

régulièrement convergente dans un intervalle arbitraire, et l'intégrale

$$\mathbf{S}_\mathrm{T} f\, d\mathrm{T}$$

déterminée.

44. Abordons maintenant le second cas, celui où l'aire T s'étend à l'infini dans le sens de chacun des axes. Nous pouvons nous borner à l'examen du cas où T est limité par des parallèles aux axes : $x = a$, $y = d$, et s'étend à l'infini dans l'angle des coordonnées positives.

45. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\, dx$$

est régulièrement convergente dans un intervalle arbitraire, et si l'intégrale

$$\mathbf{S}_\mathrm{T} f\, d\mathrm{T}$$

est déterminée, on aura

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\, dx = \mathbf{S}_\mathrm{T} f\, d\mathrm{T}.$$

Soit en effet T′ une portion de T limitée par une parallèle à l'axe des x : $y = \mathrm{N}$, on aura toujours (**42**)

$$\int_c^\mathrm{N} dy \int_a^\infty f\, dx = \mathbf{S}_{\mathrm{T}'} f\, d\mathrm{T}',$$

et à la limite

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx = \mathrm{S}_\mathrm{T} f\,d\mathrm{T}.$$

De là le théorème :

46. Théorème. — *Les trois intégrales*

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty dy, \quad \mathrm{S}_\mathrm{T} f\,d\mathrm{T}$$

seront déterminées et égales, pourvu que l'intégrale double ait un sens et que les deux intégrales

$$\int_a^\infty \operatorname{mod} f\,dx, \quad \int_c^\infty \operatorname{mod} f\,dy$$

soient régulièrement convergentes dans des intervalles arbitraires.

47. Les théorèmes précédents, rapprochés de ce que nous avons dit au n° **25**, fournissent tout ce qui est nécessaire, en général, pour le calcul et la transformation des intégrales doubles dans une aire quelconque.

V. — Remarques au sujet de la théorie précédente.

48. Il résulte des théorèmes précédents, quand l'intégrale

$$\mathrm{S}_\mathrm{T} f(x, y)\,d\mathrm{T}$$

est déterminée, que si l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \operatorname{mod} f(x, y)\,dx$$

est *régulièrement convergente*, elle représente une fonction *intégrable* (vérifiant les conditions du n° **12**). Nous allons montrer que *réciproquement*, dans des cas très généraux, si la fonction I est inté-

grable (vérifie les conditions du n° **12**), l'intégrale

$$\int \operatorname{mod} f(x, y)\, dx$$

converge régulièrement.

Dans les énoncés des théorèmes précédents, on peut donc alors substituer le mot *intégrable* aux mots *régulièrement convergente*.

49. Considérons d'abord une aire limitée T. Supposons, pour simplifier l'écriture, que f soit positif et que la fonction f_n soit définie par les relations

$$f_n = f, \text{ pour } f < N;$$
$$f_n = N, \quad \text{»} \quad f > N.$$

Nous supposerons que f vérifie une condition spéciale. Soit E_y l'ensemble (à une dimension) des points de T qui ont la même ordonnée y et pour lesquels la discontinuité de f surpasse un nombre donné α; soit, d'autre part, E″ l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles E_y n'est pas résoluble; nous supposerons que E″ est résoluble quel que soit α.

50. Lemme. — *Étant donnée la fonction de y représentée par l'intégrale à limites finies*

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n dy,$$

l'ensemble E′ des points où la discontinuité de cette fonction peut surpasser un nombre quelconque arbitrairement donné ε, quand N *passe par toutes les valeurs possibles, est résoluble.*

Soit L le maximum de $(x_2 - x_1)$; désignons par E_y l'ensemble des points dont l'ordonnée est y et pour lesquels la discontinuité de f surpasse $\frac{\varepsilon}{L}$. L'ensemble E″ des valeurs de y, pour lesquelles E_y n'est pas résoluble, sera résoluble dans l'intervalle considéré (**49**). Le théorème sera donc démontré, si nous prouvons que E″ contient tous les points de E′.

Il suffit pour cela de démontrer que, dans tout intervalle des valeurs de y ne contenant aucun point de E″, on aura nécessairement

$$\operatorname{disc} \int_{x_1}^{x_2} f_n dx \leqq \varepsilon.$$

Considérons donc un intervalle semblable. On peut écrire évidemment, quel que soit N,

$$\operatorname{disc} \int_{x_1}^{x_2} f_n dx \leqq \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{disc} f_n dx.$$

Or la discontinuité de f_n ne peut jamais surpasser celle de f, et, puisque par hypothèse l'ensemble E_y est résoluble dans l'intervalle $x_1 x_2$, on aura (sauf en des points d'un ensemble résoluble)

$$\operatorname{disc} f_n \leqq \frac{\varepsilon}{L};$$

par conséquent, puisque la fonction $(\operatorname{disc} f_n)$ est limitée quel que soit N,

$$\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{disc} f_n dx \leqq L \frac{\varepsilon}{L} \leqq \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$\operatorname{disc} \int_{x_1}^{x_2} f_n dx \leqq \varepsilon,$$

ce qu'il fallait prouver.

51. Théorème. — *Si l'intégrale à limites finies* $(f > 0)$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$$

n'est pas régulièrement convergente, I *n'est pas intégrable.*

Supposons que, pour une valeur donnée de ε, l'ensemble E_ε, défini au n° **29**, ne soit pas résoluble, nous allons en déduire que la fonction I de y n'est pas intégrable, c'est-à-dire que l'ensemble des points où la

discontinuité de cette fonction est supérieure à un nombre donné n'est pas résoluble.

Soit E' l'ensemble des points où la discontinuité de la fonction

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n(x, y)\, dx$$

peut surpasser le nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ quand N passe par toutes les valeurs possibles; cet ensemble sera résoluble en vertu du lemme précédent. Supprimons de l'ensemble E_ε tous les points qui appartiennent à E', l'ensemble restant (E_ε — E') ne sera pas résoluble. Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que, en un point quelconque β de ce dernier ensemble, la discontinuité de la fonction I est supérieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons, par impossible, qu'il n'en soit pas ainsi et qu'au point β la discontinuité de la fonction soit égale à

$$\frac{\varepsilon}{2} - \lambda;$$

on pourra prendre N assez grand pour qu'on ait au point déterminé β

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, \beta)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f_n(x, \beta)\, dx < \frac{\lambda}{3};$$

ensuite (d'après la définition de la discontinuité), δ assez petit pour qu'on ait dans l'intervalle $(\beta - \delta, \beta + \delta)$

$$\operatorname{mod}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \beta)\, dx\right| < \left(\frac{\varepsilon}{2} - \lambda\right) + \frac{\lambda}{3},$$

$$\operatorname{mod}\left|\int_{x_1}^{x_2} f_n(x, \beta)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f_n(x, y)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda}{3};$$

ajoutant les trois dernières inégalités, on aura dans tout l'intervalle $(\beta - \delta, \beta + \delta)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f_n(x, y)\, dx < \varepsilon,$$

et, par conséquent, β ne serait pas un point de l'ensemble E_ε, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour étendre ce théorème au cas d'un champ infini, nous démontrerons encore le *lemme* suivant :

52. Soit l'intégrale en x

$$I = \int_a^\infty f(x, y)\,dx;$$

transformons-la dans une intégrale en z par la relation

$$x = \frac{ab}{b-z}, \qquad dx = \frac{ab}{(b-z)^2}\,dz,$$

on aura

$$I = ab\int_0^b \frac{f(x,y)}{(b-z)^2}\,dz.$$

Cela étant, *si l'intégrale en z est régulièrement convergente, l'intégrale en x l'est aussi.*

Posons, pour simplifier,

$$\frac{f(x,y)}{(b-z)^2} = \varphi(z, y),$$

et supposons que l'on puisse avoir dans un intervalle cd

$$\int_a^b \varphi(z,y)\,dz - \int_a^b \varphi_n(z,y)\,dz < \varepsilon :$$

1° On aura *a fortiori*, quel que soit δ,

$$\int_a^{b-\delta} \varphi(z,y)\,dz - \int_a^{b-\delta} \varphi_n(z,y)\,dz < \varepsilon :$$

donc, quel que soit P, on pourra avoir dans le même intervalle cd

$$(\alpha) \qquad \int_a^P f\,dx - \int_a^P f_n\,dx < \varepsilon;$$

2° D'autre part, on aura aussi

$$\int_{b-\delta}^{b} \varphi(z, y)\, dz < \int_{b-\delta}^{b} \varphi_n(z, y)\, dz + \varepsilon;$$

on peut prendre δ assez petit pour avoir

$$\int_{b-\delta}^{b} \varphi_n(z, y)\, dz < \varepsilon, \qquad \int_{b-\delta}^{b} \varphi\, dz < 2\varepsilon,$$

et, par conséquent, P assez grand pour avoir

$$(\beta) \qquad \int_{P}^{\infty} f\, dx < 2\varepsilon.$$

Si l'intégrale en z est régulièrement convergente, on pourra vérifier les conditions (α) et (β) dans tout intervalle ne renfermant aucun point d'un ensemble résoluble déterminé, et l'intégrale en x convergera régulièrement (**39**).

53. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$I = \int_{a}^{\infty} f\, dx$$

n'est pas régulièrement convergente, et si $\varphi(z, y)$ *vérifie la condition imposée à* f, I *n'est pas intégrable dans l'intervalle correspondant.*

Si I était intégrable, l'intégrale en z, du numéro précédent, serait régulièrement convergente (**51**) et, par conséquent, aussi l'intégrale en x.

L'analyse précédente conduit donc, dans les cas précisés, à la règle suivante :

54. *Quand* $f(x, y)$ *est toujours de même signe, pour pouvoir réduire une intégrale double à deux intégrales simples, il faut et il suffit que l'on soit conduit par là à un résultat déterminé.*

CHAPITRE II.

CONVERGENCE RELATIVE.

I. — Définition et propriétés des intégrales simples.

55. Soit encore $f(x)$ une fonction de x dans un intervalle ab; appelons *infini* tout point où la *discontinuité* de cette fonction est infinie; supposons l'ensemble des infinis *résoluble*, et la fonction $f(x)$ intégrable dans tout intervalle qui ne renferme aucun infini. Faisons abstraction des infinis aux environs desquels l'intégrale est absolument convergente; s'il y en a d'autres, ils seront en nombre limité ou illimité, et, dans ce dernier cas, nous devons supposer qu'ils forment un ensemble *de première espèce* (**2**).

56. Supposons d'abord que les infinis dont il vient d'être question soient en nombre limité, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ces infinis. Si les intégrales

$$\int_a^{a_1-\delta} f\,dx, \quad \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\zeta} f\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{a_n+\eta}^{b} f\,dx,$$

qui sont absolument convergentes, tendent vers des limites déterminées, quand $\delta, \varepsilon, \zeta, \ldots$ tendent vers zéro, ces limites sont par définition les valeurs des intégrales

$$\int_a^{a_1} f\,dx, \quad \int_{a_1}^{a_2} f\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{a_n}^{b} f\,dx,$$

dont la somme est l'intégrale entre a et b. Nous dirons alors que ces intégrales sont relativement convergentes de l'ordre zéro.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ces limites s'exprime par les équations

$$\lim \int_{a_1-\delta}^{a_1-\delta'} f\,dx = 0, \qquad \lim \int_{a_1+\varepsilon'}^{a_1+\varepsilon} f\,dx = 0, \qquad \ldots,$$

où $\delta > \delta'$ et $\varepsilon > \varepsilon'$ tendent vers zéro d'une manière quelconque. Ces intégrales sont des intégrales singulières de l'ordre zéro.

Si l'ensemble des infinis où cesse la convergence absolue est du premier ordre, ses points limites $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ seront en nombre limité; si les intégrales

$$\int_a^{\alpha_1-\delta} f\,dx, \quad \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\zeta} f\,dx, \quad \ldots,$$

qui sont relativement convergentes de l'ordre zéro, tendent vers des limites déterminées quand $\delta, \varepsilon, \zeta, \ldots$ tendent vers zéro, ces limites seront par définition les valeurs des intégrales

$$\int_a^{\alpha_1} f\,dx, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f\,dx, \quad \ldots,$$

dont la somme sera l'intégrale entre a et b, et ces intégrales seront relativement convergentes du premier ordre.

Les limites précédentes existeront si l'on a

$$\lim \int_{\alpha_1-\delta}^{\alpha_1-\delta'} f\,dx = 0, \qquad \lim \int_{\alpha_1+\varepsilon'}^{\alpha_1+\varepsilon} f\,dx = 0, \qquad \ldots,$$

$\delta > \delta'$ et $\varepsilon > \varepsilon'$ tendant vers zéro. Ces intégrales sont des intégrales singulières du premier ordre.

On raisonnerait de même s'il y avait un nombre limité de points limites du second ordre, et ainsi de suite, jusqu'aux points limites de l'ordre le plus élevé qui seront enfin en nombre limité.

Supposons donc, en général, que les infinis aux environs desquels cesse la convergence absolue forment un ensemble de l'ordre n. On voit, d'après ce qui précède, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $f(x)\,dx$ soit relativement convergente de l'ordre n dans l'intervalle ab est celle-ci :

Les deux intégrales

$$\int_{x-\delta}^{x-\delta'} f\,dx, \quad \int_{x+\varepsilon'}^{x+\varepsilon} f\,dx$$

qui représentent successivement des intégrales singulières quelconques

des ordres 0, 1, 2, ..., n doivent avoir pour limite zéro, quand $\delta > \delta'$ et $\varepsilon > \varepsilon'$ tendent vers zéro.

De toutes les propriétés que nous avons reconnues aux intégrales absolument convergentes, seules les propriétés III et VII subsistent encore pour une intégrale relativement convergente d'un certain ordre.

57. I. *L'intégrale*

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

est une fonction continue de x.

En effet, le théorème ne pourrait cesser d'être vrai que pour un infini aux environs duquel cesse la convergence absolue, mais alors l'intégrale

$$\int_{x-\delta}^{x+\varepsilon} f\,dx$$

est une intégrale singulière qui tend vers zéro avec ε et δ par hypothèse.

58. II. *Si l'ensemble de tous les infinis de $f(x)$ est de première espèce, et si la fonction continue* $F(x)$ *a $f(x)$ pour dérivée, pour toute valeur de x dans l'intervalle ab les infinis exceptés, on aura*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Même démonstration qu'au n° **18**.

II. — Convergence uniforme. Intégration sous le signe.

59. Reprenons les hypothèses du n° **26**. Le champ T est limité par les valeurs x_1 et x_2 de x dans l'intervalle cd de y ou pour les valeurs y_1 et y_2 de y dans l'intervalle ab de x. Nous appelons *infini* tout point de T où la discontinuité de $f(x, y)$ est infinie; nous supposons

l'ensemble des infinis résoluble, et $f(x, y)$ intégrable dans toute aire qui ne renferme pas d'infinis.

Aux conditions générales qui précèdent nous devons joindre, dans le cas actuel, un certain nombre d'hypothèses plus particulières. En effet, lorsque les intégrales que l'on étudie ne sont convergentes que relativement, et, en général, quand on ne peut pas se fonder sur l'existence de l'intégrale double, la question de l'intégration sous le signe se complique sensiblement, et il paraît nécessaire pour arriver à une solution d'assigner des conditions restrictives à la répartition des infinis dans le champ que l'on considère.

60. Nous supposerons que les infinis sont distribués dans l'aire T de manière à vérifier l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Les infinis (isolés ou non) sont répartis sur un nombre limité de lignes continues (lignes d'infinis) qui ne peuvent être rencontrées qu'en un nombre limité de points par une parallèle à l'axe des x ou à celui des y ou sont elles-mêmes parallèles aux axes. Les infinis peuvent être disséminés d'une manière quelconque sur ces lignes ou les remplir entièrement.

Si l'on peut vérifier les conditions ci-dessus dans une aire suffisamment petite autour d'un infini donné, nous dirons que cet infini est situé sur une *ligne du premier ordre*.

2° Tous les infinis qui ne sont pas situés sur des lignes du premier ordre sont répartis sur un nombre limité de lignes continues qui vérifient la même condition que les précédentes.

S'il en est ainsi dans une aire suffisamment petite autour d'un infini donné, nous dirons que cet infini est situé sur une *ligne du deuxième ordre*.

3° Les infinis qui ne sont pas situés sur des lignes du premier ou du deuxième ordre le sont sur des lignes du troisième, et ainsi de suite jusqu'à un ordre déterminé.

61. Cela posé, l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$$

sera dite *équiconvergente* dans l'intervalle cd ou dans l'aire T, si l'ensemble des infinis situés sur une parallèle à l'axe des x est toujours

de première espèce, et si, quelque petit que soit ε, on peut prendre δ assez petit pour que l'on ait, pour cette valeur et toute valeur moindre de δ,

$$\operatorname{mod}\int_{x-\delta}^{x} f\,dx < \varepsilon, \qquad \operatorname{mod}\int_{x}^{x+\delta} f\,dx < \varepsilon,$$

quel que soit le point (x, y) dans l'aire T. Pour un point du contour, on ne doit tenir compte que de l'intégrale prise à l'intérieur de l'aire.

62. Si ces conditions peuvent se vérifier dans tout intervalle partiel des valeurs de y, ne renfermant pas des points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots$, dont l'ensemble est *de première espèce*, l'intégrale I sera *équiconvergente en général* dans l'intervalle cd ou l'aire T.

63. Théorème. — *Si les deux intégrales*

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx, \qquad \int_{y_1}^{y_2} f\,dy$$

sont équiconvergentes dans l'aire T, *on aura*

$$\int_{c}^{d} dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{a}^{b} dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy.$$

Supposons d'abord que tous les infinis soient répartis sur des lignes du premier ordre, qui ne soient pas parallèles aux axes.

Décomposons T en rectangles indéfiniment décroissants par deux systèmes de droites parallèles à chacun des axes et successivement intercalées; soit f_n une fonction égale à f dans tous les rectangles qui ne contiennent pas d'infinis ni de lignes d'infinis et à zéro dans les autres; on aura toujours

$$\int_{a}^{b} dx \int_{y_1}^{y_2} f_n\,dy = \int_{c}^{d} dy \int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx.$$

D'après les hypothèses faites sur la distribution des infinis, le nombre d'intervalles où f_n diffère de f n'augmentera indéfiniment pour aucune valeur de x ou de y, et il viendra à la limite, ces inter-

valles tendant vers zéro,

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

Supposons ensuite que tous les infinis non situés sur des lignes du premier ordre soient répartis sur des lignes du deuxième ordre non parallèles aux axes, et que l'ensemble des infinis situés sur une parallèle quelconque à l'un des axes soit au plus du premier ordre (**5**).

Décomposons encore T en rectangles indéfiniment décroissants, et soit f_n une fonction égale à zéro dans tous les rectangles où il y a une ligne du deuxième ordre ou bien un infini non isolé sur une parallèle à l'un des axes, et égale à f dans les autres; nous venons de prouver que l'on aura toujours

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f_n\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f_n\,dx.$$

D'après l'hypothèse faite sur la distribution des infinis, le nombre d'intervalles où f_n diffère de f n'augmentera indéfiniment pour aucune valeur de x ou de y, et il viendra à la limite

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx,$$

et ainsi de suite.

64. Théorème. — *Si l'intégrale par rapport à* x

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$

est équiconvergente en général, et l'intégrale par rapport à y

$$\int_{y_1}^{y_2} f\,dy$$

équiconvergente dans l'aire T, *on aura encore*

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

Si l'équiconvergence ne cesse que pour un nombre limité de points,

on peut raisonner comme s'il n'y en avait qu'un seul : $y = \beta$; on aura, en vertu du théorème précédent, ε et δ étant des constantes infiniment petites,

$$\int_a^b dx \left(\int_{y_1}^{\beta-\varepsilon} + \int_{\beta+\delta}^{y_2} f\,dy \right) = \int_c^{\beta-\varepsilon} + \int_{\beta+\delta}^{d} dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

L'intégrale par rapport à y étant équiconvergente, on aura

$$\lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \int_a^b dx \left(\int_{y_1}^{\beta-\varepsilon} + \int_{\beta+\delta}^{y_2} f\,dy \right) = \int_a dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy.$$

D'autre part, on a par définition

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_c^{\beta-\varepsilon} + \lim_{\delta=0} \int_{\beta+\delta}^{d} dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx;$$

donc, en définitive,

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f\,dx.$$

La démonstration s'étend aisément de proche en proche aux autres cas.

65. Afin de généraliser encore cette méthode, supposons, pour plus de simplicité, que l'aire T soit rectangulaire et limitée par les abscisses a et b, les ordonnées c et d.

Théorème. — *Si les deux intégrales*

$$\int_a^b f\,dx, \qquad \int_c^d f\,dy$$

sont équiconvergentes en général, et l'une au moins des deux intégrales

$$\int_c^d dy \int_a^x f\,dx, \qquad \int_a^b dx \int_c^y f\,dy$$

équiconvergente dans l'aire T, *on aura encore*

$$\int_c^d dy \int_a^b f\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f\,dy.$$

Supposons que l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy$$

soit équiconvergente.

Tout subsiste dans la démonstration du théorème précédent si l'on peut encore justifier la relation

$$\lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \int_a^b dx \left(\int_c^{\beta-\varepsilon} + \int_{\beta+\delta}^d f\,dy \right) = \int_a^b dx \int_c^d f\,dy.$$

C'est ce qui aura lieu, si l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy$$

est fonction continue de y : elle le sera par hypothèse, comme le prouve le théorème suivant :

66. *Si l'intégrale*

$$\int_c^d f\,dy$$

est équiconvergente en général dans l'intervalle ab, et l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy$$

équiconvergente dans l'intervalle cd, celle-ci sera fonction continue de y.

On peut raisonner comme si l'équiconvergence de la première intégrale ne cessait que pour un point unique : $x = \alpha$. On aura

$$\int_a^b dx \int_c^y f\,dy = \int_a^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^b dx \int_c^y f\,dy + \mathrm{R};$$

R est aussi petit que l'on veut avec ε, par hypothèse ; les deux inté-

grales du second membre sont fonctions continues de y quel que soit ε, puisque $\int_c^y f\,dy$ est, par définition de l'équiconvergence, une fonction uniformément continue de y sous le signe d'intégration. Donc l'intégrale du premier membre est une fonction continue de y.

III. — Extension au cas où l'aire T s'étend a l'infini dans un sens.

67. Il y a deux cas à distinguer ; l'aire T ne s'étend à l'infini que dans le sens de l'axe des x ; elle s'étend à l'infini dans le sens des deux axes.

68. Occupons-nous d'abord du premier cas. Supposons, pour simplifier, que l'aire T limitée par une parallèle à l'axe des y : $x = a$ et deux parallèles à l'axe des x : $y = c$, $y = d$ s'étende indéfiniment dans le sens des x positifs.

Le cas où le contour de T serait curviligne peut se ramener au précédent comme nous l'avons indiqué (**57**).

69. *Définitions*. — L'intégrale

$$I = \int_a^\infty f\,dx$$

sera *équiconvergente dans l'intervalle cd*, si l'intégrale

$$\int_a^N f\,dx$$

est équiconvergente pour toute valeur de N et si l'on peut prendre, ε étant donné, N assez grand, pour avoir dans tout l'intervalle cd

$$\operatorname{mod} \int_N^\infty f\,dx < \varepsilon$$

pour cette valeur et toute valeur supérieure de N.

Si, quelque grand que soit d, on peut vérifier ces conditions, l'intégrale est *équiconvergente dans un intervalle arbitraire*.

Elle le sera *dans un intervalle illimité* si l'on peut vérifier ces conditions pour toute valeur de y supérieure à c.

Si l'intégrale est équiconvergente dans toute portion de l'intervalle cd qui ne renferme aucun point d'un certain ensemble de première espèce, elle sera *équiconvergente en général* dans l'intervalle cd.

70. Théorème. — *Si les deux intégrales*

$$\int_c^d f\,dy, \qquad \int_a^\infty f\,dx$$

sont équiconvergentes, la première dans un intervalle arbitraire et la seconde dans l'intervalle cd, *on aura*

$$\int_c^d dy\int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty dx\int_c^d f\,dy.$$

En effet, on aura toujours (**65**)

$$\int_c^d dy\int_a^N f\,dx = \int_a^N dx\int_c^d f\,dy,$$

et à la limite

$$\int_c^d dy\int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty dx\int_c^d f\,dy.$$

71. Théorème. — *La conclusion précédente subsiste quand*

$$\int_a^\infty f\,dx$$

n'est équiconvergente qu'en général, pourvu que l'intégrale

$$\int_a^\infty dx\int_c^y f\,dy$$

soit équiconvergente dans l'intervalle cd.

D'après ce qui précède, on accorde aisément que l'on peut raisonner comme si l'équiconvergence de la première intégrale ne cessait

qu'à la limite supérieure de l'intervalle. Le théorème précédent nous donne alors

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_c^{d-\varepsilon} dy \int_a^\infty f\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^\infty dx \int_c^{d-\varepsilon} f\,dy;$$

le théorème sera démontré si l'intégrale

$$\int_a^\infty dx \int_c^y f\,dy$$

est fonction continue de y dans l'intervalle cd. C'est ce qu'établit la proposition suivante :

72. Théorème. — *Si l'intégrale*

$$\int_c^d f\,dy$$

est équiconvergente en général dans un intervalle arbitraire, et l'intégrale

$$\int_a^\infty dx \int_c^y f\,dy$$

équiconvergente dans l'intervalle cd, *cette dernière sera fonction continue de* y.

On peut écrire, en effet,

$$\int_a^\infty dx \int_c^y f\,dx = \int_a^X dx \int_c^y f\,dy + \mathrm{R},$$

R étant aussi petit que l'on veut et l'intégrale qui précède fonction continue de y (**66**); on en conclut le théorème.

IV. — Extension au cas ou l'aire T s'étend a l'infini dans tous les sens.

73. Nous pouvons nous borner au cas où T est borné par des parallèles aux axes : $x = a$, $y = c$, et s'étend indéfiniment dans l'angle des coordonnées positives.

74. Nous nous appuierons sur un lemme que nous allons d'abord démontrer :

Lemme. — *Si l'intégrale*

$$I = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

est équiconvergente dans un intervalle illimité, et si, y tendant vers l'infini, $f(x, y)$ converge uniformément vers une limite déterminée $f(x, \infty)$ dans un intervalle arbitraire, on aura

$$\lim_{y=\infty} \int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty f(x, \infty)\,dx.$$

On a, en effet, quel que soit y, pour une valeur suffisamment grande de N,

$$I = \int_a^N f(x, y)\,dx + R, \qquad \operatorname{mod} R < \varepsilon;$$

si l'on fait tendre y d'abord, et N ensuite, vers l'infini, on aura successivement

$$\lim I = \int_a^N f(x, \infty)\,dx + R', \qquad \operatorname{mod} R' < \varepsilon,$$

$$\lim I = \int_a^\infty f(x, \infty)\,dx.$$

75. *Remarque*. — En particulier, si $f(x, y)$ est une intégrale définie

$$\int_c^y F(x, y)\,dy,$$

on aura, sous les conditions précédentes,

$$\lim_{y=\infty} \int_a^\infty dx \int_c^y F\,dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty F\,dy.$$

76. Théorème. — *Si l'intégrale* $\int_a^\infty f\,dx$ *est équiconvergente*

dans un intervalle arbitraire, $\int_c^\infty f\,dy$ *équiconvergente en général dans un intervalle arbitraire, et*

$$\int_a^\infty dx \int_c^y f\,dy$$

équiconvergente dans un intervalle illimité, on aura

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f\,dy.$$

On a, en effet (**70**),

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx = \lim_{N=\infty} \int_c^N dy \int_a^\infty f\,dx = \lim \int_a^\infty dx \int_c^N f\,dy,$$

et, par la remarque qui précède (**75**),

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f\,dy.$$

77. Théorème. — *Si les intégrales*

$$\int_a^\infty f\,dx, \qquad \int_c^\infty f\,dy$$

sont équiconvergentes en général dans des intervalles arbitraires, les intégrales

$$\int_c^\infty dy \int_a^x f\,dx, \qquad \int_a^\infty dx \int_c^y f\,dy$$

équiconvergentes dans des intervalles illimités, et l'une des deux intégrales

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f\,dx, \qquad \int_a^\infty dx \int_c^\infty f\,dy$$

déterminée, la seconde sera aussi déterminée et égale à la première.

Supposons que l'intégrale

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f dy$$

soit déterminée, l'intégrale

$$\int_a^\infty dx \int_y^\infty f dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f dy - \int_a^\infty dx \int_c^y f dy$$

sera par hypothèse équiconvergente dans un intervalle illimité; on aura donc pour N assez grand

$$\int_a^\infty dx \int_y^\infty f(x, y)\, dy = \int_a^N dx \int_y^\infty f(x, y)\, dy + R, \qquad \operatorname{mod} R < \varepsilon.$$

On a d'autre part (**71**)

$$\int_a^N dx \int_y^\infty f(x, y)\, dy = \int_y^\infty dy \int_a^N f(x, y)\, dx,$$

et l'on peut supposer y assez grand pour que l'on ait

$$\operatorname{mod} \int_y^\infty dy \int_a^N f(x, y)\, dx < \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\operatorname{mod} \int_a^\infty dx \int_y^\infty f(x, y)\, dy < 2\varepsilon$$

et, par conséquent,

$$\lim_{y=\infty} \int_a^\infty dx \int_y^\infty f(x, y)\, dy = 0.$$

Mais on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx \\
&\quad = \lim_{Y=\infty} \int_a^{\infty} dx \int_c^{Y} f(x, y)\, dy \\
&\quad = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x, y)\, dy - \lim_{Y=\infty} \int_a^{\infty} dx \int_Y^{\infty} f(x, y)\, dy \\
&\quad = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f\, dy,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ces derniers théorèmes ne sont que la reproduction, avec un sens plus général, de ceux que nous avons démontrés dans le Mémoire présenté à la Société scientifique de Bruxelles. C'est pourquoi nous avons abrégé ici les démonstrations.

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME VIII.

Pages.

FIN DU TOME VIII DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

17998 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

